Université Joseph Fourier — 2015-16
Calcul Différentiel — L3 option B

Feuille 6 - courbes dans le plan et dans l'espace

Exercice 1. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée regulière, de classe C^k avec $k \geq 1$, et $\| \, \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle que la *longueur de α relative au choix de $\| \, \|$* est donnée par la formule :

$$L(\alpha, a, b) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du.$$

(i) Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon R dans $\mathbb{R}^2$.

(ii) Calculer la longueur d'un arc de parabole $y = ax^2$ au moyen de argsh.

(iii) Montrer l'inégalité $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq L(\alpha, a, b)$.

(iv) Soient $c, d > 0$ et $\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\alpha(t) = (c\cos(t), d\sin(t))$. On considère $t_1, t_2 \in]0, \pi/2[$ tels que $t_1 < t_2$ et $\tan(t_1)\tan(t_2) = d/c$. Montrer que les droites normales aux points $\alpha(t_1)$ et $\alpha(t_2)$ sont a égale distance D de $(0,0)$. Avec ces données, démontrer que $L(\alpha, 0, t_1) + L(\alpha, 0, t_2) + D = L(\alpha, 0, \pi/2)$.

(v) On revient au cadre général. Que vaut $L(\alpha, a, b)$ lorsque la paramétrisation est normale ?

(vi) Montrer que $L(\alpha, a, b)$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation de α, *i.e.* si $s : I \to J$ est un C^1-difféomorphisme, alors $L(\alpha, a, b) = L(\alpha \circ s^{-1}, s(a), s(b))$.

(vii) Montrer que l'application $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+v^2} \geq \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}(u-v),$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}$.

(viii) Soient $c, d \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\alpha(t) = (t, f(t))$. On note Γ l'ensemble des arcs α construit de la sorte. Montrer que $\inf_{\alpha\in\Gamma}\{L(\alpha, a, b)\}$ est un minimum atteint par la seule la courbe appartenant à Γ associée à une fonction affine. Indication: Appliquer le point précédent avec $u = f'(x)$ et $v = g'(x)$.

Exercice 2. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée regulière, de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On note $\| \, \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est d'apprendre à calculer concrètement la courbure d'un arc paramétré.

(i) Soit $t_0 \in [a,b]$. On considère l'application $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ donnée par $s(t) = L(\alpha, t_0, t)$. Montrer que s est une fonction croissante bijective et, si J dénote l'intervalle image de s, elle définit en plus un C^k-difféomorphisme de $]a,b[$ sur l'intérieur de l'intervalle J. On appellera *s la longueur d'arc* ou *abscisse curviligne* de α d'origine t_0.

(ii) Montrer que $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ et

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|},$$

pour tout $t \in]a, b[$.

(iii) Montrer que la courbe paramétrée $\delta = \alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ est normale.

(iv) Montrer que, pour tout $u \in J^\circ$, les vecteurs $\delta'(u)$ et $\delta''(u)$ sont orthogonaux.

(v) Montrer que, pour tout $t \in]a, b[$, on a $\alpha'(t) = s'(t)\delta'(s(t))$ et $\alpha''(t) = s''(t)\delta'(s(t)) + (s'(t))^2\delta''(s(t))$. En déduire $\delta''(s)$ en fonction de α et ses dérivées.

(vi) Montrer qu'en un point paramétré par $s = s(t)$, la *courbure* définie par $K(s) = \|\delta''(s)\|$ vaut

$$K(s) = \frac{\sqrt{\|\alpha'(t)\|^2\|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(vii) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^k. Montrer que la courbure de la courbe $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha(t) = (t, f(t))$ en un point $(t_0, f(t_0))$ est

$$K(t_0) = \frac{|f''(t_0)|}{\sqrt{(1 + f'(t_0)^2)^3}}.$$

(viii) Calculer la courbure des courbes suivantes en un point quelconque (où $a \in \mathbb{R}$):

(a) $y = ax$	(b) $y = ax^2$	(c) $y = e^{ax}$
(d) $x = \cos(ay)$	(e) $xy = a$	(f) $y = ax^n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 3. Soit $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, de classe C^∞, regulière, d'abscisse curviligne s et soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $\tau(s) = (\alpha \circ s^{-1})'(s)$, appelé *vecteur tangent*.

(i) Montrer que $\tau(s)$ est un vecteur unitaire et qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\tau(s) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.

(ii) On note $\nu(s) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$. Montrer que $\nu(s)$ est un vecteur unitaire, orthogonal $\tau(s)$. Par définition, le repère orthonormal $(\tau(s), \nu(s))$ associé au point $\alpha \circ s^{-1}(s)$ est le *repère de Frenet* en le paramètre s associé à α.

(iii) On pose $J = s([a, b])$. Montrer qu'il existe une unique fonction $c : J \to \mathbb{R}$, dire *courbure algébrique (ou courbure signée)* associée à α, telle que, pour $s \in J$, $d\tau(s)/ds = c(s)\nu(s)$.

(iv) Montrer que, pour tout $s \in J$, $d\nu(s)/ds = -c(s)\tau(s)$.

(v) Montrer que $K(s) = |c(s)|$, pour tout $s \in J$.

(vi) Considérons l'ellipse d'equation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, avec $a > b > 0$. Posons $h(t) = a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)$. Montrer que

$$\tau(s(t)) = \Big(-\frac{a\sin(t)}{\sqrt{h(t)}}, \frac{b\cos(t)}{\sqrt{h(t)}} \Big) \quad \text{et} \quad \nu(s(t)) = \Big(-\frac{b\cos(t)}{\sqrt{h(t)}}, \frac{a\sin(t)}{\sqrt{h(t)}} \Big).$$

En déduire que $c(s) = \frac{ab}{\sqrt{h(t)^3}}$.

Exercice 4. Démontrer qu'une courbe plane régulière est déterminée de manière unique par les fonctions $c(s)$ à une isométrie près, *i.e.* si $c :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe une courbe paramétrée $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ dont la courbure est c, et en plus, si $\beta :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ est une autre courbe paramétrée dont la courbure est c, il existe une application linéaire $L \in \mathrm{SO}(2)$ et un element $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $L(\alpha(t)) + v = \beta(t)$, pour tout $t \in]a, b[$.

Exercice 5. Soit $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, de classe C^∞, regulière, paramétrée par longueur d'arc d'abscisse curviligne s. On pose $\tau(s) = \alpha'(s)$, appelé *vecteur tangent*. On rappelle que $\tau(s)$ est un vecteur unitaire, et que $\alpha''(s)$ est orthogonal à $\tau(s)$.

(i) On dit que α est *birégulière* si elle est régulière et $\tau'(s)$ n'est jamais colinéaire avec $\tau(s)$, et on suppose désormais que c'est le cas. On définit alors $\nu(s) = \tau'(s)/\|\tau'(s)\|$ le *vecteur normal* (unitaire). C'est clair que $\tau'(s) = K(s)\nu(s)$, et que le plan P engendré par $\tau(s)$ et $\nu(s)$ est le plan osculateur. Vérifier que $\nu'(s)$ est à son tour normal à $\nu(s)$.

(ii) Posons $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$ le *vecteur binormal*. Montrer que les vecteurs $\beta'(s)$ et $\nu(s)$ sont colinéaires, et il existe donc une fonction $T : [a, b] \to \mathbb{R}$, dite *torsion* de α, telle que $\beta'(s) = T(s)\nu(s)$. Montrer que $\nu'(s) = -K(s)\tau(s) - T(s)\beta(s)$.

Exercice 6. Soit $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, de classe C^∞, bireguliière, pas nécessairement paramétrée par longueur d'arc.

(i) Montrer que dans ce cas on peut reécrire l'expression de la courbure en un point paramétré par $s = s(t)$ donnée dans l'Exercice 2 par la formule

$$K(s) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(ii) Montrer que la torsion en un point paramétré par $s = s(t)$ est donnée par

$$T(s) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

Exercice 7. Démontrer qu'une courbe birégulière dans l'espace est déterminée de manière unique par les fonctions courbure $K(s)$ et torsion $T(s)$ à une isométrie près, *i.e.* si $K, T :]a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $K(s) > 0$ pour tout $s \in]a, b[$, alors il existe une courbe paramétrée $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^3$ dont la courbure et la torsion sont K et T, resp.; de plus, si $\beta :]a, b[\to \mathbb{R}^3$ est une autre courbe paramétrée dont la courbure et la torsion sont K et T, resp., il existe une application linéaire $L \in \mathrm{SO}(3)$ et un element $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $L(\alpha(t)) + v = \beta(t)$, pour tout $t \in]a, b[$.

Indication: Considérer le système différentiel linéaire donné par les formules de Frenet.

Exercice 8. Montrer qu'une *hélice circulaire* $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ définie sur $\mathbb{R}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, a pour courbure $K = a/(a^2 + b^2)$ et pour torsion $T = b/(a^2 + b^2)$. En déduire que courbure positive et torsion constantes caractérisent les hélices circulaires.

Exercice 9. Calculer la longueur d'arc, la courbure K et la torsion T de la *cubique gauche* $\alpha(t) = (t, t^2/2, t^3/6)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Calculer la courbure K et la torsion T de la courbe $\alpha(t) = (t^3, (t+1)^3, 3t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Déterminer le rayon de courbure $R(x)$ et le centre de courbure $O(x)$ de la parabole $y = x^2/2$.

Exercice 12. On considère une courbe plane donnée en coordonnées polaires : $\alpha(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}$.

(i) Montrer que la courbure est donnée par

$$K(\theta) = \frac{2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)(\rho(\theta) - \rho''(\theta))}{(\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(ii) Déterminer le vecteur $\nu(\theta)$, le rayon de courbure $R(\theta)$ et le centre de courbure $O(\theta)$.

(iii) Déterminer le lieu du centre de courbure (la développée) de la spirale logarithmique $\rho(\theta) = e^{a\theta}$.

Exercice 13. Calculer la courbure de la spirale $\rho(\theta) = \theta$.

Exercice 14. Quelles sont les courbes planes paramétrées par longueur d'arc dont la courbure est $K(s) = 1/s$, pour $s \in \mathbb{R}_{>0}$?

Exercice 15. Calculer la longueur d'arc, la courbure et le rayon de courbure de la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2)du, \int_0^t \sin(u^2)du\right)$. Faire un déssin de la courbe. Quelle est la longueur de la courbe ?

Exercice 16. Un cercle C de rayon 1 (la roue du vélo) roule sans glisser sur l'axe Ox.

(i) Quelle est la courbe $\alpha(u)$ décrite par un point fixé de C (la valve) situé à l'origine en O, où O désigne l'abscisse du point de contact de C avec Ox ?

(ii) Calculer la courbure $K(u)$ et le rayon de courbure $R(u)$ de cette courbe.

(iii) Déterminer aussi le lieu du centre de courbure $O(u)$ (la développée).