Feuille 6 - Equations différentielles

Exercice 1. Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (et résoudre le problème de Cauchy correspondant, si demandé).

1. $y' + 2y = 2t + 1$
2. $y' - 4y = \cos(3t)$
3. $y' - 4y = e^{4t}$
4. $2y' + 4y = (t^2 + t + 1)e^{-t}$, $y(0) = 2$
5. $y' + y = \frac{e^{-t}}{t}$
6. $y'(t) - 3t^2 y(t) = \frac{\sin\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}} e^{t^3}$, $y(0) = 0$.

Exercice 2. Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (et résoudre le problème de Cauchy correspondant, si demandé).

1. $y'' + 2y' - 3y = f(t)$ pour $f(t) = 0$, $f(t) = te^t$.
2. $y'' - 2y' + 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 2t + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4. $y'' - 2y = 0$
5. $y'' + 2y = f(t)$ pour $f(t) = 0$, $f(t) = 4$, $f(t) = t$, $f(t) = e^t$, $f(t) = \cos t$, $f(t) = \cos\sqrt{2}t$.
6. $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 4$.
7. $y'' - 4y' + 2y = f(t)$, pour $f(t) = 0$, t, e^{2t}.

Exercice 3. Donner la solution générale des systèmes de la forme $Y'(t) = AY(t)$ (ou $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, si un vecteur $B(t)$ est donné). Tracer l'allure générale des trajectoires dans le plan (et décrire le comportement quand $t \to \pm\infty$).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Donner la solution générale du système $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$, et tracer l'allure des trajectoires $(x(t), y(t))$ dans le plan (on pourra utiliser deux méthodes différentes, dont le passage à une équation d'ordre 2 à une seule fonction inconnue).

Exercice 5. Discuter l'allure des trajectoires pour le système $\begin{cases} x' = -x + 2(1+a)y \\ y' = (a-1)x + (1+2a)y \end{cases}$ en fonction du paramètre réel a.

Exercice 6. Décrire la solution générale du système (à coefficients non constants!) $Y' = A(t)Y$ pour

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exprimer la résolvante du système, et observer que $R_{t_0}^t \neq exp(\int_{t_0}^t A(u)\ du)$.

Exercice 7. Donner la résolvante du système linéaire d'ordre 1 de matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix},$$

avec a, b des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues,

$$A = \begin{pmatrix} a(t) & \beta(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix}$$

et (E) le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $X(t_0) = X_0$, $X(t) \in \mathbb{R}^2$. Soit enfin α (respectivement γ) l'exponentielle de la primitive de a (resp. c) s'annulant en t_0.

1. Montrer qu'il existe une unique solution $X(t)$ maximale sur $J \subset \mathbb{R}$. Quel est l'intervalle J ?
2. Calculer le wronskien $w(t)$ de ce système en fonction de $w(t_0)$.
3. Déterminer la résolvante $R_{t_0}^t$ de ce système en fonction de α, β et γ.
4. Retrouver le wronskien.
5. On suppose que a et c sont intégrables sur $[t_0, \infty]$, et que $\beta(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$. Montrer que la résultante possède une limite quand t tend vers $+\infty$, puis que toute trajectoire $X(t)$ a une limite qu'on explicitera en fonction des données du problème.
6. On considère maintenant l'équation avec second membre

   $$X' = AX + k(t),$$

   où $\forall t \in \mathbb{R}, k(t) = (1 + e^{-t^2}, -1 + 2/(1 + t^2))$. Trouver un équivalent quand $t \to +\infty$ de la solution avec conditions initiales $X(t_0) = X_0$.

Exercice 9. Donner la solution générale de l'équation $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ pour les matrices A suivantes

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$