Université Joseph Fourier — 2015-16
Calcul Différentiel — L3 option B

Feuille 4

Extrema

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique qui n'est pas un extremum.
2. Y a-t-il des maxima locaux ?
3. Montrer que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ sont minima globaux.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $df(x_0) \neq 0$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x).$$

1. Montrer que x_0 est un point critique de g.
2. Montrer que $Hess(f, x_0) = Hess(g, x_0)$.
3. Mêmes questions que ci-dessus pour $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$.

Exercice 3. Trouver les points critiques des fonctions suivantes, et dire si ce sont des extrema (maxima, minima), ou des points-cols :

$$f_1(x,y) = (2x+1-y)^2, \qquad f_2(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$$
$$f_3(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1, \qquad f_4(x,y) = e^{1+x^2+y^2},$$
$$f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy, \qquad f_6(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1,$$
$$f_7(x) = \frac{1}{1+||x||^2},\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad f_8(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y),$$
$$f_9(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right), \qquad f_{10}(x,y,z) = xy + z^2,$$
$$f_{11}(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2, \qquad f_{12}(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$, et la matrice Hessienne de f en $(0,1)$ dans la base canonique est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$:

1. Calculer $Hess(g, (0,1))$.
2. g a-t-elle un extremum local en $(0,1)$?

Exercice 5. Existe-t-il $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$ ait un minimum local en $(2,1)$?

Fonctions implicites

Exercice 6. Montrer que la relation $y^3 + (x^2+1)\,y + x^4 = 0$ définit implicitement y en fonction de x ; montrer que la fonction $y = \phi(x)$ correspondante est définie sur tout $\mathbb{R}$ et de classe C^∞.

Exercice 7. Soit $f(x,y) = y^3 - 2y^2 + y - x^2y$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Décrire les ensembles de niveau contenant ces points critiques.
3. Déterminer la nature des points critiques (maximum local, minimum local, d'un point col).
4. Pourquoi les lignes de niveaux qui ne passent par un des points critiques sont-elles régulières ?
5. Donner l'allure des ensembles de niveau de f.

Exercice 8. Soit $f(x,y) = 2 + (x-y)^2 + (x-1)^3$.

1. Montrer que f a un unique point critique, que l'on notera A.
2. Dessiner les ensembles de niveau qui passent par A (étudier $y_1 = x - (1-x)^{3/2}$ et $y_2 = x + (1-x)^{3/2}$ pour $x \leq 1$).
3. Le point A est-il un maximum local, un minimum local de f ?
4. Tracer les ensembles de niveau de f.

Exercice 9. Soit $f(x,y) = y^2 + y - x^3 + x^2$.

1. Montrer que f a deux points critiques, que l'on notera A et B.
2. Décrire les ensembles de niveau qui passent par A et B.
3. Dessiner les lignes de niveau de f.

On s'intéresse maintenant à $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$.

4. Montrer que $E = (1,0)$ est un point de $\mathcal{C}$.
5. Montrer qu'au voisinage de $x = 1$, il existe une fonction $y = \varphi(x)$ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$. Cette fonction est-elle unique ?
6. Montrer que, toujours au voisinage de $x = 1$, il existe une unique φ comme ci-dessus, avec $\varphi(1) = 0$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 4 autour de 1.

Exercice 10. On considère le sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 1\},$$

où $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z + z^4$.

1. Calculer le gradient de g.
2. Déterminer l'ensemble U des points de S au voisinage desquels le théorème des fonctions implicites s'applique et permet d'exprimer z comme une fonction $z = f(x,y)$.
3. Quand $(x,y,z) \in U$, calculer le gradient de la fonction f. Peut-il s'annuler ? Si oui, pour quelles valeurs de x et y ?
4. Montrer que S admet un plan tangent en tout point, et donner une équation pour ce plan en un point quelconque $(a,b,c) \in S$.

Exercice 11. On considère la courbe qui est l'intersection $\Gamma = S \cap C \subset \mathbb{R}^3$, où S est la sphère unité, et U est le cylindre vertical dont la base est le cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Quels sont les points de Γ au voisinage desquels la courbe Γ peut être localement paramétrée par la coordonnée x ? Idem pour une paramétrisation par y, puis par z.