Université Joseph Fourier — 2015-16

Calcul Différentiel — L3 option B

Feuille 3 - Taylor, extrema

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+y^2)^2$. Montrer que f est de classe C^2, et calculer sa différentielle seconde $d^2f(a)$ en un point quelconque $a \in \mathbb{R}^2$. Calculer la matrice hessienne au point $(2,1)$, et comparer avec $d^2f(2,1)$.

Exercice 2. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre deux des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$,
2. $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$,
3. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$,
4. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$,
5. $f(x,y) = \sin(xy)$ en $(1,\pi)$,
6. $f(x,y) = e^x \sin(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
7. $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$,
8. $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$,
9. $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$,
10. $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2,3,4)$.

Exercice 3. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^r, où I est un intervalle ouvert qui contient $[0,1]$. Montrer (par récurrence) que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}(\varphi^{(r)}(t) - \varphi^{(t)}(0))\, dt$$

Exercice 4. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in U$, $\delta > 0$ tel que pour $||h|| < \delta$, $a + h \in U$. Etant donné h avec $||h|| < \delta$, on considère la fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a+th)$.

1. Montrer que φ est bien définie au moins sur un intervalle ouvert J qui contient $[-1,1]$ (dans la suite on suppose J choisi ainsi).
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = df(a+th)(h)$.
3. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) = d^2f(a+th)(h)(h)$.
4. En déduire une formule du reste intégral dans le développement de Taylor.

Exercice 5. Utiliser les résultats précédents pour calculer $(0.95)^{2.01}$

1. avec une précision plus petite que $1/200$,
2. avec une précision plus petite que $1/5000$.

Exercice 6. Montrer la formule approchée

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

pour des valeurs suffisamment petites de $|x|, |y|$ (on pourra préciser le sens de “suffisamment”).

Exercice 7. 1. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 1 en $(1,1)$ de $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$.

2. Utiliser le point précédent pour estimer $e^{\frac{4}{10}}$ à partir de $\frac{4}{10}=(1+\frac{1}{10})^2-(1-\frac{1}{10})^2$. Vérifier que l'erreur est plus petite que 0.3.

Exercice 8. Soit $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^2 et $a\in U$. Montrer que si $Hess_f(a)$ est défini positif, alors au voisinage de a, f est au dessus de son plan tangent.

Exercice 9. Soit S le graphe de fonction $f(x,y)=x-2\left(x^2+y^2\right)^2$.

1. Donner une équation pour le plan tangent en un point quelconque $(a,b,f(a,b))\in S$.
2. Trouver les points où le plan tangent à S est horizontal.
3. Montrer qu'en tout point $(a,b,c)\in S$ la surface S est en dessous de son plan tangent. Indication : On pourra étudier le signe de
$$q(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\,hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,k^2.$$

Exercice 10. Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si pour tout $a,b\in\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda\in[0,1]$
$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$
Montrer qu'une fonction $f(x_1,x_2)$ de classe C^2 est convexe si et seulement si, pour tout $a\in\mathbb{R}^2$ et tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$
$$d^2f_a(h)\;=\;\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2\geq 0$$

Indication : considérer les fonctions d'une variable $g_{a,h}(t)=f(a+th)$ et calculer $g''_{a,h}$ en fonction de $d^2f_a(h)$ (On rappelle qu'une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 est convexe si et seulement si $g''\geq 0$).

Exercice 11. Trouver tous les points critiques des fonctions suivantes et dire si ce sont des points-cols ou des extrema :

1. $f(x,y)=x^2-y^2$,
2. $f(x,y)=x^3+y^3-3x$,
3. $f(x,y)=xy$,
4. $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}}, & \text{si } xy\neq 0,\\ 0, & \text{si } xy=0.\end{cases}$

Exercice 12. 1. Déterminer les extrema de $f(x,y)=x^2+y^4$ et de $g(x,y)=x^4+y^4$, et préciser leur nature.

2. Soit f de classe C^2 telle qu'elle a un extremum strict en $a\in\mathbb{R}^n$. La matrice hessienne $Hf(a)$ est-elle nécessairement définie positive ou négative ?

Exercice 13. Soit $f(x,y)=\left(y-3x^2\right)\left(y-2x^2\right)^2\left(y-x^2\right)$. Montrer que :

1. $(0,0)$ est un point-selle.
2. $Hf(0,0)=0$.
3. f a un minimum local en $(0,0)$ sur toute droite qui passe pour $(0,0)$, i.e., si $g(t)=(at,bt)$ alors $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a un minimum local en 0 pour tous a,b.