Université Joseph Fourier | 2015-16
Calcul Différentiel | L3 option B

Feuille 2 - différentiabilité (suite)

Exercice 1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On considère la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t},$$

et quand elle existe, on l'appelle **dérivée directionnelle** de f au point a, dans la direction v.

(a) Montrer que si f est différentiable en a, alors la dérivé directionnelle en a existe pour tout v, et vaut $df(a)(v)$.

(b) Donner un exemple de fonction qui admet en un point a une dérivée directionnelle dans n'importe quelle direction, mais qui n'est pas différentiable en a.

(c) Montrer que quand u est un vecteur de norme 1, $df(a)(u) \leq ||\nabla f(a)||$, avec égalité si et seulement si u pointe dans la direction du gradient (en d'autres termes, le gradient pointe dans la direction de plus grande pente).

(d) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \to U$ différentiable, telle que $f(\gamma(t))$ est constante. Montrer qu'alors pour tout t, $\gamma'(t)$ est orthogonal au gradient $\nabla f(\gamma(t))$ (en d'autres termes, le gradient est orthogonal aux ensembles de niveau de f).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2y - 3xy + xy^2$.

1. Montrer que le point $(1,-1,3)$ est dans le graphe de f. Donner une équation pour le plan tangent au graphe de f en ce point.
2. Calculer le gradient de f en $(1,-1)$. Donner une équation de la tangente à la courbe de niveau 3 en le point $(1,-1)$, et vérifier qu'elle est orthogonale à $\nabla f(1,-1)$.
3. Ecrire une équation pour le plan tangent au graphe de f en un point quelconque $(a,b,f(a,b))$ du graphe. Pour quels points (a,b) ce plan contient-il l'origine ?

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Calculer $\nabla f(x,y)$ en un point quelconque. Pour quels (x,y) a-t-on que la direction en (x,y) de pente la plus négative pointe vers l'origine ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{x+y^2} + x^3y - 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t^2-1, t)$.

(a) Calculer $df(0,1)$, et $dg(1)$.

(b) Calculer $d(f \circ g)(1)$ de deux façons différentes (en donnant une formule pour $f \circ g(t)$, ou en utilisant la question (a)).

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(v) = ||v||^\alpha$. Calculer $\nabla f(v)$.

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes et vérifier si les derivées partielles mixtes coïncident :

(a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$,

(b) $g(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\sin(z)$,

(c) $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$,

(d) $k(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2$,

(e) $l(x, y) = \arctan(x^3 - 2xy)$.

Exercice 7. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 3 des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y, z) = xyz$,

(b) $g(x, y, z) = e^{xyz}$,

(c) $h(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \sin(y^2 z)$,

(d) $k(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

Exercice 8. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \ \forall (x, y)$. Montrer que f s'écrit sous la forme

$$f(x, y) = g(x) + h(y),$$

où g et h sont deux fonctions de classe C^2.

Exercice 9. On se propose de déterminer toutes les fonctions $f\,(x, t)$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (ici c est une constante réelle, on suppose $c > 0$). Si f est une telle fonction, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g\,(u, v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right)$.

(a) Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en termes de dérivées partielles de f.

(b) En déduire la forme de g, puis de f.

(c) Vérifier que toute fonction f de la forme précédente est bien solution de l'équation.

Exercice 10. *(Opérateur laplacien)* On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^n$ si elle vérifie l'équation suivante, appelée équation de Laplace :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \equiv 0 \text{ sur } U.$$

Vérifier que les fonctions suivantes sont harmoniques sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et détérminer U :

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$,

(b) $g(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

(c) $h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

(d) $k(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(5z) + 4y$.

Exercice 11. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definie par $g\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. A toute fonction $f\,(x, y)$ de classe C^2, on associe la fonction $F = f \circ g$.

(a) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de F.

(b) Application : trouver toutes les fonctions ϕ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telles que la fonction $f\,(x, y) = \phi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 12. Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Posons $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g(||x||)$. Montrer que :

$$\Delta f(x) = \frac{d^2 g}{dt^2}(||x||) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}(||x||).$$

Exercice 13. Soient f, g deux fonctions de classe C^2 définies sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^2$ et telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Montrer que f et g sont harmoniques sur U.