Université Joseph Fourier 2015-16
Calcul Différentiel L3 option B

Feuille 1 - différentiabilité

Exercice 1
Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right), \qquad \sqrt{1-(x-y)^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}, \qquad \ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right).$$

Exercice 2
Déterminer les ensembles de niveaux des fonctions suivantes :

$$u_1(x,y) = x^2 - 5y^2, \qquad u_2(x,y) = x^2 + 5y^2,$$

$$u_3(x,y) = x^5 - 5y^2, \qquad u_4(x,y) = x^2 + x + y^2, \qquad u_5(x,y) = x\cos(y).$$

Exercice 3
On considère la fonction $u(x,y) = 4y^2 - 2y + 4x^2 + x$

(a) Calculer $u(-1,1)$.

(b) Déterminer une équation de l'ensemble de niveau $u = 5$.

(c) Déterminer le lieu des points $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u(x,y) \leq 2$.

Exercice 4
Déterminer le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes :

(a) $u(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $u(0,0) = 0$;

(b) $v(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $v(0,0) = 0$;

(c) $w(x,y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $w(0,0) = 0$.

Exercice 5
On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$, $f(0,0) = 0$, et $f(x,y) = 1$ si $y = x^2$ mais $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ non nul, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est continue (la fonction est continue donc continue en restriction à toute droite par l'origine). Montrer que f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(2+h, 2+k) = 1 + h + k + hk$ pour tout $k, h \in \mathbb{R}^2$. Quelle est la différentielle de f au point $(2,2)$?

Exercice 7
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$. Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en a telles que $g(a) \neq 0$. Montrer que

(a) $f+g$ est différentiable en a, et $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.

(b) fg est différentiable en a, et $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$.

(c) $1/g$ est différentiable en a, et $d(1/g)(a) = -dg(a)/g(a)^2$.

(d) f/g est différentiable en a, et $d(f/g)(a) = (g(a)df(a) - f(a)dg(a))/g(a)^2$.

Exercice 8
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$. Soient $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $\lambda : U \to \mathbb{R}$ différentiables en a. Montrer que la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda(x) f(x)$ est différentiable en a, et donner une formule pour sa différentielle en a.
Exercice 9
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue, si elle admet des dérivées partielles, si elle est différentiable, si elle admet des dérivées partielles continues.

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$;
2. $g(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $g(0,0) = 0$;
3. $h(x,y) = \dfrac{y^3}{x^4+y^4}$ si$(x,y) \neq (0,0)$, $h(0,0) = 0$.

Exercice 10
On considère la fonction f définie par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$..

(a) Montrer que f est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$. Calculer $df(0,0)$ et $df(1,1)$.

(b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les comparer.

Exercice 11
Représenter le graphe des fonctions $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = y^2$, puis celui de $f(x,y) = \min(x^2, y^2)$.
Montrer que la fonction f n'est pas différentiable en (x_0, x_0) si $x_0 \neq 0$.
Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.
Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
Montrer que la fonction f n'admet de dérivées partielles dans aucun voisinage de $(0,0)$.
Montrer que la réciproque du théorème : *"Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0)"* est fausse.
Exercice 12
Soit $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n, que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$.

(a) Montrer que l'application $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ définie par $f(A) = A^2$ est différentiable, et que sa différentielle au point A est donnée par
$$H \mapsto AH + HA.$$

(b) Faire de même pour $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ définie par $g(A) = A^3$, et calculer sa différentielle.

(c) Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à une matrice son déterminant est différentiable. Donner une expression pour sa différentielle au point A pour une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(d) Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à une matrice son déterminant est différentiable. Montrer que sa différentielle en A est donnée par
$$H \mapsto \operatorname{tr}(\operatorname{co}(A)^t H),$$
où $\operatorname{co}(A)$ est comatrice de A, et $\operatorname{co}(A)^t$ est sa transposée.

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel réel, muni d'un produit scalaire $\langle x, y\rangle$ et de la norme associée $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Soit $u : E \to E$ une application linéaire symétrique, c'est-à-dire que

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \text{ pour tout } x, y \in E.$$

1. Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}$ qui envoie x sur $\langle u(x), x\rangle$ est différentiable sur E, et calculer sa différentielle. Noter en particulier que l'application $x \mapsto ||x||^2$ est différentiable.
2. On définit une application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$. Montrer que φ est différentiable, et calculer sa différentielle $d\varphi(a)$ en un point quelconque $a \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.