Université Grenoble Alpes
Année académique 2017-18

L3 Math

Examen
Jeudi 24 mai

Durée 3h. Téléphones, ordinateurs, documents interdits. Toute réponse doit être justifiée. Barème indicatif: 4/4/4/6/8

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x^2 - e^y, x^2 \sin(y) - xy^3)$.

(1) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Décrire $dF(a, b)$ pour un point quelconque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
(3) Montrer qu'il existe un voisinage V de $(1, 0)$ tel que $F(V)$ est un ouvert, et $F|_V$ définit un difféomorphisme de classe C^∞ de V sur $F(V)$.
(4) Avec V comme dans le point précédent, on note $G = (F|_V)^{-1}$ la fonction réciproque, qui envoie $F(V)$ sur V. Montrer que $(0, 0) \in F(V)$ et décrire $dG(0, 0)$.

Exercice 2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$F(x, y, z) = x \sin(\pi(x + y - z)) + y^2 z,$$

et

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 2\}.$$

(1) Montrer que le point $(0, 1, 2)$ est dans S.
(2) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi(x, y)$ de classe C^∞ définie au voisinage de $(0, 1)$ telle que S est décrite au voisinage de $(0, 1, 2)$ comme le graphe de φ.
(3) Donner un développement limité à l'ordre 1 pour φ autour de $(0, 1)$.
(4) Donner une équation du plan tangent à S en $(0, 1, 2)$.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy

$$(\star) \begin{cases} 2y'' + y' - y = f, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(1) Montrer que $(\star)$ a une et une seule solution définie sur tout $\mathbb{R}$.
(2) Donner la solution générale de l'équation $2y'' + y' - y = 0$.
(3) Grâce à la méthode de variation des constantes, donner une solution particulière de l'équation $2y'' + y' - y = f$ lorsque $f(t) = e^{3t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(4) Résoudre le problème de Cauchy $(\star)$ lorsque $f(t) = e^{3t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

TSVP

Exercice 4. Dans cet exercice, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels, et I_n désigne la matrice identité. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

(1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $A, B : I \to M_n(\mathbb{R})$ deux applications différentiables. Montrer que l'application $M : I \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $M(t) = A(t)B(t)$ pour tout $t \in I$ est différentiable sur I, et donner une formule pour sa différentielle en un point $t_0 \in I$ quelconque.

(2) On considère l'application $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = {}^tA \cdot A$. Montrer que Φ est différentiable partout, et calculer sa différentielle en un point $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(3) Soit A une matrice inversible. Montrer que $d\Phi(A) : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ est surjective. Est-elle injective?

Dans l'exercice 5, les questions (4) et (5) sont indépendantes des questions (1), (2) et (3). Si besoin, on pourra utiliser les formules suivantes

$$K(s(t)) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}, \qquad T(s(t)) = -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2}.$$

Exercice 5. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^3, paramétrée par longueur d'arc. On note $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$ le trièdre de Frenet, $K(s)$ la courbure, et $T(s)$ la torsion au point de paramètre s.

(1) Rappeler les équations de Frenet.

(2) Rappeler comment exprimer l'angle entre deux vecteurs v et w non nuls en utilisant le produit scalaire usuel $\langle v, w \rangle$.

(3) Montrer que si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(s) = T(s)/K(s)$ est constante, alors il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que le vecteur tangent $\tau(s)$ fait un angle constant avec v (Indication: calculer la dérivée de $\frac{T(s)}{K(s)}\tau(s) - \beta(s)$).

On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Calculer la longueur de γ entre 0 et t (pour t quelconque), et en déduire une paramétrisation de γ par abscisse curviligne.

(5) Calculer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion de γ en un point quelconque.

(6) Montrer que le vecteur tangent à γ fait un angle constant avec un certain vecteur $v \neq 0$.

(7) Déterminer le vecteur v de la question précédente.