Université Grenoble Alpes
Année académique 2016-17

L3 Math

Corrigé de l'examen de session 1 (vendredi 19 mai)

Ce corrigé a éte rédigé très rapidement, il risque de contenir des coquilles! Les raisonnements sont fiables, les calculs pas forcément...

Exercice 1. (1) $F(1,2,1) = 1 + 1^3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$.

(2) F est C^∞ sur tout $\mathbb{R}^3$ car c'est une application polynomiale. On calcule $\frac{\partial F}{\partial z} = 2x^3z - 3xyz^2$, et $\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,1) = -4 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe dont des ouverts I, J avec $(1,2) \in I \subset \mathbb{R}^2$, $1 \in J \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ avec $\psi(1,2) = 1$ et $F(x,y,z) = 0 \leftrightarrow z = \psi(x,y)$ sur $I \times J$.

(3) Le TFI nous dit aussi que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(1,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,1)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(1,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,1)}.$$

Noter que le dénominateur de ces fractions a déjà été calculé en (2). On calcule $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2z^2 - yz^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -xz^3$, donc $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,1) = 1$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,1) = -1$. Ceci donne $\frac{\partial \psi}{\partial x}(1,2) = 1/4$, et $\frac{\partial \psi}{\partial y}(1,2) = -1/4$, et enfin

$$f(1+h, 2+k) = 1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{4}k + o_{(h,k)->(0,0)}(||(h,k)||).$$

(4) Les ensembles de niveau sont orthogonaux au gradient, donc le plan tangent demandé a pour vecteur normal $\nabla F(1,2,1) = (1,-1,-4)$. Une équation est donnée par $\langle (x-1, y-2, z-1), (1,-1,-4) \rangle = 0$, ou encore $x - y - 4z = -5$.

Exercice 2. (1) $\nabla g(x,y) = (2x + 8y, 8x + 14y)$, qui ne s'annule que pour $(x,y) = (0,0)$ car $\det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \neq 0$. L'origine est donc le seul point critique. $H = Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{tr}(H) = 14 > 0$, $\det(H) = -36 < 0$, donc il s'agit d'un point col.

(2) On écrit $x^2 + 8xy + 7y^2 = (x+4y)^2 - 9y^3 = (x+7y)(x+y)$, donc on peut prendre $u(x,y) = x + 7y$, $v(x,y) = x + y$. Ces formes linéaires sont indépendantes car $\det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$.

(3) Dans les coordonées u, v, la courbe de niveau $C \in \mathbb{R}$ a pour équation $uv = C$. Pour $C = 0$, c'est l'union de deux droites, pour $C \neq 0$, il s'agit d'une hyperbole [faire le dessin!!]

(4) H n'est pas borné, donc pas compact.

(5) Soit $\alpha = \inf_H f$. Comme f est positive, $\alpha \geq 0$. Par définition de l'inf, il existe une suite $X_n = (x_n, y_n)$ telle que $f(X_n) \to \alpha$ quand n tend vers l'infini, et comme f est la distance l'origine, X_n est bornée. Quitte à extraire, on peut supposer que X_n converge, disons vers $X \in \mathbb{R}^2$. Par continuité de f, $f(X) = \alpha$ donc X est un min.

Par contre, f n'admet pas de max sur H, puisque H n'est pas borné (et que f est la distance à l'origine).

(6) Comme ∇g ne s'annule pas sur H (à détailler), on peut utiliser les multiplicateurs de Lagrange, qui donnent une condition nécessaire pour que $X = (x, y)$ soit un minimum de $f|_H$, à savoir que si $X \in H$ est critique, alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(X) = \lambda \nabla g(X)$.

(7) On travaille avec $\phi = f^2$ plutôt que f, car il revient au même de minimiser la distance ou la distance au carré (mais pour le carré les calculs sont plus simples). On cherche un (x, y) tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + 8y) \\ 2y = \lambda(8x + 14y) \\ x^2 + 8xy + 7y^2 = 225 \end{cases}.$$

Noter que $\lambda = 0$ ne donne jamais de solution à ce système, donc s'il y a une solution on peut écrire $y = \frac{1-\lambda}{4\lambda}x$, en résolvant la première équation pour y. En introduisant ceci dans la seconde équation, on trouve $x(4\lambda + (7\lambda - 1)\frac{1-\lambda}{4\lambda}) = 0$, mais $x = 0$ ne donne pas de solution, donc on doit avoir $(4\lambda + (7\lambda - 1)\frac{1-\lambda}{4\lambda}) = (\lambda+1)(9\lambda-1)/4\lambda = 0$, donc $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1/9$. Pour $\lambda = -1$, les deux premières équations donnent toutes les deux $y = -x/2$, et en introduisant ceci dans la troisième équation on trouve $x^2 = -180$, qui n'a pas de solution (réelle). Pour $\lambda = 1/9$, les deux premières équations donnent $y = 2x$, et en remplaçant ceci dans l'équation de H, on trouve $x = \pm\sqrt{5}$, puis $y = \pm 2\sqrt{5}$, donc deux points critiques, $\pm\sqrt{5}(1, 2)$, qui sont tous les deux à distance 5 de l'origine, donc $\min_H f = 5$.

Exercice 3. (1) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, car c'est l'image inverse de $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Comme Ψ de classe C^1, elle est différentiable, donc continue, donc $\Psi^{-1}(GL_n(\mathbb{R}))$ est un ouvert, qui contient 0 car $\Psi(0) = I_n$ est inversible. On peut donc prendre $V = \Psi^{-1}(GL_n(\mathbb{R}))$.

(2) Pour tout $x \in U$ et h assez petit (c.-à-d. tel que $x + h \in U$), on a $\Psi(x + h) = \Psi(x) + d\Psi(x)(h) + o_{h\to 0}(||h||)$, où o est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Comme $\Psi(x)$, $d\Psi(x)(h)$ et $o(||h||)$ sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, on a alors $\Phi(x+h) = \Psi(x+h)(x+h) = \Psi(x)(x)+\Psi(x)(h)+d\Psi(x)(h)(x)+d\Psi(x)(h)(h)+o(||h||)(x+h) = \Phi(x)+L(h)+\tilde{o}(||h||)$, où $\tilde{o}$ est maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et on a noté $L(h) = \Psi(x)(h) + d\Psi(x)(h)(x)$.

L'estimation d'erreur vient de ce que quand $h \to 0$,

$$\frac{||d\Psi(x)(h)(h)||}{||h||} \leq |||d\Psi(x)(h)||| \leq |||d\Psi(x)||| \cdot ||h|| \to 0,$$

et

$$\frac{o(||h||)(x + h)}{||h||} \leq \frac{|||o(||h||)|||}{||h||}||x + h|| \to 0.$$

La dernière limite est vraie par définition de o, grâce au fait que $x + h$ est borné (quand disons, $||h|| \leq 1$).

Noter que $h \mapsto \Psi(x)(h)+d\Psi(x)(h)(x)$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. En effet, le premier terme de la somme est linéaire en h car pour tout $x \in U$, $\Psi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et le deuxième l'est aussi car pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$, $d\Psi(x)(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)(x) = (\lambda_1 d\Psi(x)(h_1) + \lambda_2 \Psi(x)(h_2))x = \lambda_1 \Psi(x)(h_1)(x) + \lambda_2 \Psi(x)(h_2)(x)$.

Ceci montre la différentiabilité, et $d\Phi(x)(h) = \Psi(x)(h) + d\Psi(x)(h)(x)$.

(3) La formule pour la différentielle de la question précédente définit une application continue, c'est-à-dire que Φ est C^1. De plus, $d\Phi(0) = \Psi(0)(h) + d\Psi(0)(h)(0) = I_n(h) + 0 = h$. Comme $d\Phi(0)$ est inversible, le théorème d'inversion locale dit que c'est un difféomorphisme local en 0, c'est-à-dire qu'il existe des voisinages W_1 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et W_2 de I_n dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tels que Φ induit un difféomorphisme entre W_1 et W_2.

Exercice 4. (1) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation est équivalente à $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{4}{t^2}y = 4$, qui est une équation linéaire d'ordre 2, sous forme résolue pour y. De plus, les coefficients $a_1(t) = 1/t$, $a_0(t) = -4/t^2$ et $g(t) = 4$ de l'équation résolue pour y définissent des fonctions continues sur $]0, +\infty[$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour les équations linéaires dit que tout problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in]0, +\infty[$ a une et une seule solution, définie sur tout $]0, +\infty[$.

(2) Il ne peut pas exister de solution, car en injectant les données de ce problème de Cauchy dans l'équation, on trouve $0 + 0 - 4 = 0$, contradiction. Noter qu'au voisinage de $t = 0$, on ne peut pas écrire l'équation sous forme résolue pour y, avec coefficients continus (donc Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas, ouf!)

(3) (E_0) est l'équation $y''+\frac{1}{t}y'-\frac{4}{t^2}y = 0$ (on pourrait aussi donner $t^2y''+ty'-4y = 0$, ces équations sont équivalentes sur $]0, +\infty[$). Pour $y(t) = t^\alpha$, on calcule $y'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$, $y''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$, et on introduit ceci dans l'équation. On obtient que t^α résout (E_0) si et seulement si $(\alpha(\alpha-1) + \alpha + 4)t^{\alpha-2} = 0$, c-à-d. ssi $\alpha = \pm 2$.

(4) (E_0) est une équation linéaire, homogène d'ordre 2, sous forme résolue pour y, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Par la question précédente, $\phi_1(t) = t^2$ et $\phi_2(t) = t^{-2}$ sont deux solutions, et elles sont linéairement indépendantes, puisque leur wronskien vaut $-4t^{-1} \neq 0$. Donc $\{\phi_1, \phi_2\}$ forme une base de l'espace des solutions de (E_0).

Donc la solution générale s'écrit $c_1t^2 + c_2t^{-2}$, pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraires.

(5) On applique la méthode de variation des constantes, et on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(t) = c_1(t)t^2 + c_2(t)t^{-2}$. On sait par le cours que c'est une solution de (E) ssi $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ satisfait $W(t)C'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$, où g est le second membre de l'équation résolue pour y (c-à-d. $g(t) = 4$ dans notre cas), et $W(t)$ est la matrice wronskienne de la famille de solutions. On veut donc

$$\begin{pmatrix} t^2 & t^{-2} \\ 2t & -2t^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne $c_1'(t) = 1/t$, $c_2'(t) = -t^3$, puis $c_1(t) = \ln(t)$, $c_2(t) = -t^4/4$. Une solution particulière est donnée par $t^2 \ln t - t^2/4$, mais le deuxième terme est solution de (E_0), donc on peut aussi prendre $y(t) = t^2 \ln t$ comme solution particulière.

La solution générale de (E) est donc la somme de cette solution particulière et de la solution générale de (E_0), càd.

$$y(t) = t^2 \ln t + at^2 + bt^{-2},$$

$a, b \in \mathbb{R}$ arbitraires.

(6) En utilisant la solution génerale de la question précédente, on obtient $y(0) = a + b$, $y'(0) = 2a - 2b + 1$. On veut dont résoudre le système $a + b = 1, 2a - 2b + 1 = 0$, ce qui donne $a = 1/4$, $b = 3/4$. La solution est donc $y(t) = t^2 \ln t + (t^2 + 3t^{-2})/4$.

(7) On pose $y_0 = y$, $y_1 = y'$, et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Le système est alors

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(8) C'est le système $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Si Y_1 désigne la valeur de la solution en $t = 1$, la solution est donnée par $R_1^t Y_1$, mais aussi par $W(1) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, où $W(t)$ est la matrice wronskienne des solutions t^2, t^{-2}, et c_1, c_2 sont les coefficients dans la solution de la question 4. On a donc

$$R_1^t = W(t)W(1)^{-1} = W(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1},$$

ou encore

$$R_1^t = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t^{-2} & \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}t^{-2} \\ t - t^{-3} & \frac{t}{2} + \frac{1}{2}t^{-3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (environ 5 pts). On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

(1) $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, -2\sin 2t) = -\frac{3}{2}\sin 2t(\cos t, -\sin t, \frac{4}{3})$. En particulier $||\gamma'(t)|| = \frac{5}{2}|\sin 2t|$, qui s'annule si et seulement si $t = k\pi/2$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. La courbe est régulière sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, et sur tous les translatés de cet intervalle par un multiple de $\pi/2$.

On écrit $\gamma'(t) = a(t)v(t)$, où $a(t) = \frac{3}{2}\sin 2t$, $v(t) = (\cos t, -\sin t, 4/3)$, donc $\gamma''(t) = a'(t)v(t) + a(t)v'(t)$, et comme $v \wedge v = 0$, $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = a(t)^2 v(t) \wedge v'(t) = \frac{9}{4}\sin^2 2t(\frac{4}{3}\cos t, -\frac{4}{3}\sin t, -1)$. Ceci donne $||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|| = \frac{15}{4}\sin^2 2t$, qui s'annule précisément en les multiples de $\pi/2$. Donc la courbe est birégulière sur les intervalles où elle est régulière.

(2) Pour $t \in [0, \pi/2]$, $s(t) = \frac{5}{2}\int_0^t |\sin 2u| du = \frac{5}{2}\int_0^t \sin 2u du = \frac{5}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{5}{2}\sin^2 t$. On a $s = \frac{5}{2}\sin^2 t$ si et seulement si $t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{5}}$, défini pour $s \in [0, 5/2]$.

(3) On calcule $\gamma'(t)/||\gamma'(t)|| = \tau(s(t))$ en utilisant le calcul de $||\gamma'(t)||$ fait en question 1.

(4) Par Frenet on a $\tau'(u) = K(u)\nu(u)$, donc $\frac{d}{dt}(\tau(s(t))) = \tau'(s(t))\cdot s'(t) = K(s(t))\nu(s(t))s'(t)$. Par ailleurs, $s'(t) = ||\gamma'(t)|| = \frac{5}{2}|\sin 2t|$, donc pour $t \in]0, \pi/2[$ on a $\frac{d}{dt}(\tau(s(t))) = \tau'(s(t)) \cdot s'(t) = K(s(t))\nu(s(t))\frac{5}{2}\sin 2t$.

(5) En comparant la dérivée du vecteur de la question 3 et la question 4 précédent, on obtient

$$\frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 0) = K(s(t))\nu(s(t))\frac{5}{2}\sin 2t,$$

et en prenant la norme des deux côtés on a

$$K(s(t)) = \frac{6}{25\sin 2t},$$

pour tout $t \in]0, \pi/2[$.

(6) $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$, $\gamma'(\frac{\pi}{4}) \wedge \gamma''(\frac{\pi}{4}) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{4})$, donc le plan osculateur est donné par $\frac{3}{\sqrt{2}}(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{3}{\sqrt{2}}(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{9}{4}z = 0$.

Le cercle osculateur en $\gamma(t)$ a pour rayon $R(s(t)) = 1/K(s(t)) = 25\sin 2t/6$, donc il est centré en $\gamma(\pi/4) + R(\pi/4)\nu(s(t))$.

Par les questions 3 et 4, on trouve $\nu(s(t)) = (\sin t, \cos t, 0)$, donc le centre du cercle osculateur est donné par $C(t) = \gamma(t) + \frac{25\sin 2t}{6}(\sin t, \cos t, 0)$.

Pour $t = \pi/4$, on trouve un rayon de $R = 25/6$, centre $C = \frac{7\sqrt{2}}{3}(1, 1, 0)$, $\tau = (-\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{4}{5})$, et $\nu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, puis une paramétrisation du cercle osculateur de la forme $C + R(-\nu\cos\alpha + \tau\sin\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.