Université Joseph Fourier 2015-16
Calcul Différentiel L3 option B

Contrôle continu n° 2

corrigé

Exercice 1. (question de cours) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui a un point critique en a.

1. Démontrer que si $Hess(f,a)$ est définie positive, alors f a un minimum local strict en a.
2. Montrer que la réciproque de l'implication précédente est fausse.

Exercice 2. On considère l'ensemble C des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x^2y^3 - 2xy^2 - xy - y^2 = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique point de la forme $(n,1)$ dans C avec $n \in \mathbb{Z}$.
   Le point $(x,1)$ est dans C ssi $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2) = 0$, donc $n = 2$.
2. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique pour décrire C au voisinage de ce point $(n,1)$, pour donner x comme une fonction de y. On notera φ la fonction correspondante, définie au voisinage de $y = 1$.
   On note $f(x,y) = 2x^2y^3 - 2xy^2 - xy - y^2 - 1$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 - 2y^2 - y$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5 \neq 0$.
3. Montrer que φ est de classe C^∞ au voisinage de 1, et donner un développement limité à l'ordre 1 pour φ autour de $y = 1$.
   Ceci découle du TFI et du fait que $f(x,y) = 2x^2y^3 - 2xy^2 - xy - y^2 - 1$ est C^2. Bien entendu, $\varphi(1) = 2$, et $\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)} = -12/5$. $\varphi(y) = 2 - \frac{12}{5}(y-1) + o(|y-1|)$.
4. Expliquer comment calculer $\alpha = \varphi''(1)$ (on donnera une équation de degré 1 que doit satisfaire α, que l'on ne demande pas de résoudre). Comme $f(\varphi(y),y) \equiv 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y),y) \equiv 0$, et en dérivant les deux membres par rapport à y on trouve
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(y),y)(\varphi'(y))^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(y),y)(\varphi'(y)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y),y)\varphi''(y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(y),y) \equiv 0,$$
   En $(2,1)$, on a $f_{xx}(2,1) = 4$, $f_{xy}(2,1) = 19$, $f_{yy}(2,1) = 38$, donc
   $$4 \cdot (-\frac{12}{5})^2 + 2 \cdot 19 \cdot (-\frac{12}{5}) + 5\varphi''(1) + 38 = 0,$$
   et finalement $\alpha = 754/125$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 + 2y, 2y^2 - x)$.

1. Déterminer l'ensemble des points au voisinage desquels cette application admet un inverse local de classe C^1. $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -1 & 4y \end{pmatrix}$ Cette matrice est inversible ssi $8xy + 2 \neq 0$, donc le TIL s'applique au voisinage de chaque point qui n'est pas sur l'hyperbole $xy = -1/4$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 1 de la réciproque autour de $(0,0)$. On note g l'inverse local, noter que $g(0,0) = (0,0)$. $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_f(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Donc la différentielle de l'inverse locale est $(h,k) \mapsto (-k, h/2)$, et le DL est donné par $f^{-1}(x,y) = (-y, x/2) + o(||(x,y)||)$.

Exercice 4. On se donne deux points distincts $p = (-1, 0)$ et $q = (1, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, et on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(v) = ||v - p|| + ||v - q||$, où $||w||$ désigne la norme euclidienne de $w \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ le plus grand ouvert sur lequel f est différentiable. Donner une description de U, et calculer la différentielle de f en un point quelconque $a \in U$.
2. Pour quels $a \in U$ le théorème des fonctions implicites donne-t-il une description locale de l'ensemble de niveau $f(a)$ localement comme le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$? On a $f(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, qui est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$. Par la formule pour la différentielle de $x \mapsto \langle x, x\rangle$ et la différentielle d'une composée, on a $\nabla f(v) = \frac{v-p}{||v-p||} + \frac{v-q}{||v-q||}$. Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y(\frac{1}{||v-p||} + \frac{1}{||v-q||})$, le théorème s'applique aux points où $y \neq 0$, c'est-à-dire en dehors de l'axe des x.
3. Pour quels $a \in U$ l'ensemble de niveau de f contenant a est-il une courbe régulière ? Pour un tel a, donner une expression pour la droite tangente à l'ensemble de niveau correspondant de f en a. Les points critiques de f sont tels que $v - p$ et $v - q$ sont de direction opposée, c'est-à-dire pour v sur le segment entre p et q. En chaque point $a \in \mathbb{R}^2 \setminus [p, q]$, la courbe de niveau par a est donc régulière, et la tangente est l'ensemble des v tels que $\langle \frac{a-p}{||a-p||} + \frac{a-q}{||a-q||}, v - a\rangle = 0$.
4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe différentiable contenue dans un ensemble de niveau de f. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $\frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t)-p\rangle}{||\gamma(t)-p||} = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t)-q\rangle}{||\gamma(t)-q||}$ $f(\gamma(t))$ est constante, donc de différentielle nulle. Mais par la formule de différentielle d'une composée, sa différentielle est $df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.
5. Donner une formule pour l'angle entre $\gamma'(t)$ et $\gamma(t) - p$. Le cosinus de l'angle entre deux vecteurs v, w est donné par $\langle v, w\rangle / ||v|| \, ||w||$, donc l'angle est $\arccos \frac{\langle \gamma(t)-p, \gamma'(t)}{||\gamma(t)-p|| \; ||\gamma'(t)||}$.
6. Déduire que la tangente à l'ensemble de niveau en $\gamma(t)$ est la bissectrice extérieure au sommet $\gamma(t)$ du triangle formé par p, q et $\gamma(t)$ (on rappelle que la bissectrice extérieure en un sommet est la droite par ce sommet orthogonale à la bissectrice usuelle). $\arccos \frac{\langle \gamma(t)-p, \gamma'(t)}{||\gamma(t)-p|| \; ||\gamma'(t)||} = \arccos \frac{\langle \gamma(t)-q, \gamma'(t)}{||\gamma(t)-q|| \; ||\gamma'(t)||}$.