Université Joseph Fourier
Calcul Différentiel

2015-16
L3 option B

Contrôle continu n° 3

29 avril 2016

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barème indicatif : 6/4/6/4***

On rappelle les formules suivantes pour une courbe paramétrée birégulière α dans $\mathbb{R}^3$;
$K(t) = \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \ / \ \|\alpha'(t)\|^3$, $T(t) = -\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle \ / \ \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2$.

Exercice 1. On considère l'application $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$, $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la résolvante $R_{t_0}^t$ du système $Y'(t) = A(t)Y(t)$, pour t_0, $t \in \mathbb{R}$ quelconques.
   $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ donc $R_{t_0}^t = \exp(\int_{t_0}^t A(u)du) = \exp \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & t - t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$
   $e^{t^2 - t_0^2} \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Déterminer les solutions de $Y' = AY + B$ où $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}$. Sol. part. $Y(t) = R_{t_0}^t C(t)$ avec $C'(t) = R_t^{t_0} B(t) = e^{t_0^2} \begin{pmatrix} t_0 - t \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. $C(t) = e^{\frac{t_0^2}{2}} \begin{pmatrix} t_0 t - \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$. Sol. gén. : $Y(t) = R_{t_0}^t Y_0 + te^{\frac{t^2}{2}} \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer la solution de $Y' = AY + B$ telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \begin{pmatrix} t + \frac{t^2}{2} \\ 1 + t \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère deux courbes $v, w : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞. Enoncer et démontrer des formules pour $\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t)\rangle$, $\dfrac{d}{dt}\|v(t)\|$, $\dfrac{d}{dt}(v(t) \wedge w(t))$ et $\dfrac{d}{dt}\|v(t) \wedge w(t)\|$.

1. $\langle v', w\rangle + \langle v, w'\rangle$
2. $\langle v', v\rangle / \|v\|$
3. $v' \wedge w + v \wedge w'$
4. $\langle v' \wedge w + v \wedge w', v \wedge w\rangle / \|v \wedge w\|$

Exercice 3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe donnée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.

1. Calculer la coubure et la torsion de γ en un point quelconque. $\|\gamma'(t)\| = \text{ch}t$, $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = 2\cosh^2 t$. $K(t) = \sqrt{2}/\cosh^2 t$, $\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle = 2\sinh t$, $T(t) = -\tanh t/\cosh t$.
2. Déterminer le repère de Frenet en un point de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, et donner une équation du plan osculateur à γ en ce point. $\tau(t) = (-\sin t, \cos t, \sinh t)/\cosh t$. $\langle \tau(t), \gamma''(t)\rangle = \sinh t$, $\nu(t) = (\gamma''(t) - \sinh(t)\tau(t))/(K(t)\cosh^2 t) = (-\cosh t \cos t + \sinh t \sin t, -\cosh t \sin t - \sinh t \cos t, 1)/\cosh t)$. $\beta(t) = (\cosh t \cos t + \sinh t \sin t, \cosh t \sin t - \sinh t \cos t, 1)/(\sqrt{2}\cosh t)$.
   Plan osculateur : $\langle (x, y, z) - \gamma(t_0), \beta(t_0)\rangle = 0$.

Exercice 4. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^∞ dont l'image est contenue dans la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que la courbure de γ est ≥ 1 en tout point.

On peut supposer γ paramétrée par longueur d'arc, donc $\gamma''(t) = K(t)\nu(t)$. Comme $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle \equiv 1$, on a $\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle \equiv 0$, donc $\langle \gamma''(t), \gamma(t)\rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \equiv 0$, ou encore $K(t)\langle \nu(t), \gamma(t)\rangle + 1 \equiv 0$. Comme $K(t)$ est par définition positive, $\langle \nu(t), \gamma(t)\rangle < 0$, et par Cauchy-Schwarz, $-1 \leq \langle \nu, \gamma\rangle < 0$. Ceci donne $K(t) = -1/\langle \nu(t), \gamma(t)\rangle \geq 1$.