Université Joseph Fourier — 2014-15
Calcul Différentiel — L3 option B

Contrôle continu n° 4

29 avril 2015

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barème indicatif : 10/2/8***

Exercice 1. On considère la cardioïde, courbe $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par

$$\gamma(\theta) = ((1 - \cos\theta)\cos\theta, (1 - \cos\theta)\sin\theta).$$

Pour certaines parties de l'exercice, on pourra écrire $\gamma(\theta) = (1 - \cos\theta)\vec{e_r}$, en veillant à se souvenir que $\vec{e_r}$ n'est pas constant.

1. Montrer que la réflexion par rapport à l'axe des x est une symétrie de l'image de γ.
2. Déterminer les points singuliers de γ (c'est-à-dire les points où γ' s'annule).
3. Donner une expression pour la longueur d'arc de γ, et calculer sa longueur totale.
4. Calculer la courbure de γ en un point régulier quelconque.
5. Donner une équation pour le cercle osculateur au point $(0, 1)$.
6. Donner une paramétrisation de la développée de γ (c'est-à-dire la courbe c telle que $c(t)$ est le centre du cercle osculateur de γ en t). Sur quel intervalle cette courbe est-elle définie ?

Exercice 2. Soit $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(t) = (-1 + \cos^2 t - e^t, \cos t + t, -t - \cos t + \sin^2 t + e^t).$$

1. Calculer $\langle \alpha(t), \vec{v} \rangle$, pour $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
2. En déduire une équation du plan osculateur à α en le point $(-1, 1, 0)$.
3. Que vaut la torsion de α en le point $(-1, 1, 0)$?

Exercice 3. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^3, paramétrée par longueur d'arc. On note $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$ le trièdre de Frenet, $K(s)$ la courbure, et $T(s)$ la torsion.

1. Rappeler les équations différentielles de Frenet (qui décrivent $\vec{\tau}'$, $\vec{\nu}'$, $\vec{\beta}'$ dans le trièdre de Frenet).
2. Montrer que si $T(s)/K(s)$ est constante, alors le vecteur tangent γ' fait un angle constant avec une direction fixe (indication : calculer la dérivée de $\frac{T(s)}{K(s)}\vec{\tau}(s) - \vec{\beta}(s)$).
3. Montrer que la courbe définie par $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ fait un angle constant avec une direction que l'on déterminera.