Université Joseph Fourier 2014-15

Calcul Différentiel L3 option B

Contrôle continu n° 4, corrigé

Exercice 1. 1. $\gamma(-\theta) = ((1-\cos\theta)\cos\theta, -(1-\cos\theta)\sin\theta) = R_x(\gamma(\theta))$.

2. $\gamma'(\theta) = \sin\theta e_r + (1-\cos\theta)e_\theta$; comme $\{e_r, e_\theta\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, ce vecteur est nul ssi $\sin\theta = 1-\cos\theta = 0$, càd. ssi $\theta = 0$.

3. Comme $\{e_r, e_\theta\}$ est une base **orthonormée** de $\mathbb{R}^2$, $||\gamma'(\theta)||^2 = (\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2 = 2-2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$. Ceci donne $s(\theta) = 2\int_0^\theta |\sin\frac{u}{2}|\, du$. Pour $\theta \geq 0$, ceci donne $s(\theta) = 8\sin^2\frac{\theta}{4}$, et $s(-\theta) = -s(\theta)$. La longueur totale vaut $s(\pi) - s(-\pi) = 8$.

4. $\gamma''(\theta) = (2\cos\theta - 1)e_r + 2\sin\theta e_\theta$, et $\sqrt{||\gamma'||^2||\gamma''||^2 - \langle\gamma', \gamma''\rangle} = 3|1-\cos\theta| = 6\sin^2\frac{\theta}{2}$.

$$K(s(\theta)) = \frac{3}{4|\sin\frac{\theta}{2}|}.$$

5. $(0,1) = \gamma(\frac{\pi}{2})$, donc la courbure au point $(0,1)$ est donnée par $3/2\sqrt{2}$, càd. le rayon du cercle osculateur en ce point vaut $2\sqrt{2}/3$. Comme $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-1,1)$, $\vec{\tau}(s(\frac{\pi}{2})) = (-1,1)/\sqrt{2}$, donc $\vec{\nu}(s(\frac{\pi}{2})) = \pm(1,1)/\sqrt{2}$. Par convexité, on veut une composante radiale négative, donc $\vec{\nu}(s(\frac{\pi}{2})) = (-1,-1)/\sqrt{2}$. Centre du cercle osculateur $(0,1) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(-1,-1)/\sqrt{2} = (-2/3, 1/3)$. Equation du cercle osculateur :

$$(x + \frac{2}{3})^2 + (y - 1/3)^2 = (2\sqrt{2}/3)^2.$$

6. Le même raisonnement de convexité donne $\vec{\nu}(s(\theta)) = ((\cos\theta - 1)e_r + \sin\theta e_\theta)/2|\sin\frac{\theta}{2}|$. Développée est paramétrée par

$$(1-\cos(\theta))e_r + \frac{4|\sin\frac{\theta}{2}|}{3} \cdot \frac{(\cos\theta - 1)e_r + \sin\theta e_\theta}{2|\sin\frac{\theta}{2}|},$$

pour $\theta \neq 0$ (pt singulier), ou encore

$$(\cos\theta + \cos^2\theta - 2, \sin\theta(1-\cos\theta))/3.$$

Exercice 2. 1. $\langle\alpha(t), \vec{v}\rangle = 0$ pour tout t.

2. Ceci dit que la courbe est contenue dans le plan $v^\perp = \{(x,y,z) | x+y+z = 0\}$, qui est donc le plan osculateur à la courbe.

3. Comme la courbe est plane, sa torsion est identiquement nulle.

Exercice 3. 1. $\vec{\tau}' = K\vec{\nu}$, $\vec{\nu}' = -K\vec{\tau} - T\vec{\beta}$, $\vec{\beta}' = T\vec{\nu}$.

2. Si $T(s)/K(s)$ est constante,

$$\frac{d}{ds}(\frac{T}{K}\vec{\tau} - \vec{\beta}) = \frac{T}{K}\vec{\tau}' - \vec{\beta}' = T\vec{\nu} - T\vec{\nu} = 0.$$

Donc il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{T(s)}{K(s)}\vec{\tau}(s) - \vec{\beta}(s) = \vec{v}$ pour tout s. Le cosinus de l'angle entre $\gamma'(s)$ et $\vec{v}$ est donné par

$$\cos\angle = \frac{\langle\gamma'(s), \vec{v}\rangle}{||\gamma'(s)||\;||\vec{v}||} = \frac{\langle\vec{\tau}(s), \vec{v}\rangle}{||\vec{v}||} = \frac{\langle\vec{\tau}(s), \frac{T(s)}{K(s)}\vec{\tau}(s) - \vec{\beta}(s)\rangle}{||\vec{v}||} = \frac{T(s)}{K(s)}\frac{1}{||\vec{v}||}$$

qui est constant.

3. On note $s(t)$ l'abcisse curviligne, par exemple d'origine $t=0$. Noter que $s(t) \neq t$, puisque $||\gamma'|| = e^t + e^{-t}$.
$\gamma' \wedge \gamma'' = (-\sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^{-t}, 2)$, $||\gamma' \wedge \gamma''|| = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})$, $K(s(t)) = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$.
$\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle = -2\sqrt{2}$, et $T(s(t)) = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$.
$K(s(t)) = T(s(t))$, donc le rapport K/T est constant et vaut 1.
Pour trouver la direction fixe, on calcule $\vec{\nu}(s(t))$, qui est un multiple positif de norme 1 de

$$\gamma'' - \frac{\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{\langle \gamma', \gamma' \rangle}\gamma'.$$

Noter que ceci est l'orthogonalisé de γ'' par rapport à γ', c'est-à-dire qu'on soustrait a γ'' sa projection orthogonale sur γ'. Ceci donne

$$\vec{\nu}(s(t)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, e^{-t} - e^t))/(e^t + e^{-t}).$$

Comme $\vec{\tau}(s(t)) = (e^t, -e^t, \sqrt{2}))/(e^t + e^{-t})$, on calcule

$$\vec{\beta}(s(t)) = (-1 - e^{-2t}, 1 + e^{2t}, (e^{-t} - e^t)/\sqrt{2})/(e^t + e^{-t})^2.$$

Finalement, on obtient

$$\vec{\tau}(s(t)) - \vec{\beta}(s(t)) = (1, -1, 0),$$

donc γ' fait un angle constant ave $(-1, 1, 0)$.