Université Joseph Fourier 2015-16
Calcul Différentiel L3 option B

Contrôle continu n° 3

29 avril 2016

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barême indicatif : 6/4/6/4***

On rappelle les formules suivantes pour une courbe paramétrée birégulière α dans $\mathbb{R}^3$;
$K(t) = \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \ / \ \|\alpha'(t)\|^3$, $T(t) = -\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle \ / \ \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2$.

Exercice 1. On considère l'application $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la résolvante $R_{t_0}^t$ du système $Y'(t) = A(t)Y(t)$, pour t_0, $t \in \mathbb{R}$ quelconques.
2. Déterminer les solutions de $Y' = AY + B$ où $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la solution de $Y' = AY + B$ telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère deux courbes $v, w : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞. Enoncer et démontrer des formules pour $\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t)\rangle$, $\dfrac{d}{dt}\|v(t)\|$, $\dfrac{d}{dt}\left(v(t) \wedge w(t)\right)$ et $\dfrac{d}{dt}\|v(t) \wedge w(t)\|$.

Exercice 3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe donnée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.

1. Déterminer le repère de Frenet en un point de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, et donner une équation du plan osculateur à γ en ce point.
2. Calculer la coubure et la torsion de γ en un point quelconque.

Exercice 4. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^∞ dont l'image est contenue dans la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que la courbure de γ est ≥ 1 en tout point.