

Contrôle continu n° 3
2 avril 2015

Durée : 1h. Documents et téléphones interdits. Barème indicatif : 5/5

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$(t + 1)y' = ty + t(t + 1)e^t.$$

1. Sur quel(s) intervalle(s) peut-on appliquer le résultat du cours sur l'existence des solutions ?
Enoncer ce résultat.
2. Donner la solution générale de l'équation sur $] - 1, +\infty[$.
3. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (t + 1)y' = ty + t(t + 1)e^t \\ y(0) = e \end{cases}$$

4. Existe-t-il une solution de l'équation différentielle définie au voisinage de $t = -1$?
5. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (t + 1)y' = ty + t(t + 1)e^t \\ y(-1) = e \end{cases}$$

a-t-il une solution ?

Exercice 2. 1. Résoudre pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ quelconques le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = \alpha_1 \\ y'(0) = \alpha_2 \end{cases}$$

2. Ecrire un système différentiel d'ordre 1 pour $Z(t) = (y(t), y'(t))$ équivalent à l'équation différentielle.
3. Dédire des questions 1 et 2 une expression pour e^{At} , où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Donner la solution générale de l'équation.

$$y'' + 4y' + 13y = \cos 3t.$$