Université Joseph Fourier | 2014-15
Calcul Différentiel | L3 option B

Contrôle continu n° 2

18 mars 2015

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barème indicatif : 4/10/10***

Exercice 1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ un fonction de classe C^2.

1. Quand dit-on que de f a un point critique en a ? Quand dit-on que f a un extremum en a ?
2. Quand dit-on que $Hess_f(a)$ est non-dégénérée ? Que peut-on dire sur un point critique en lequel le hessien est non-dégénéré ?
3. Déterminer les points critiques de la fonction $f(x, y) = (e^{xy} - 1)^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Sans calculer plus de dérivées, pouvez-vous dire si $Hess_f(0, 0)$ est non dégénéré ?

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + x^3 + y^2 + y^3 + xy.$$

1. Montrer que f a exactement 4 points critiques, et déterminer la nature de chacun de ces points critiques.
2. Dans un premier temps, on considère l'ensemble de niveau 0. Montrer que si l'ensemble de niveau 0 admet une tangente horizontale en (x, y), alors x est racine du polynôme

$$3x^2 + 2x^3 - 27x^4 - 54x^5 - 27x^6.$$

   Montrer que ce polynôme a au moins une racine $x \neq 0$. Que peut-on en déduire sur l'existence d'une tangente horizontale pour l'ensemble de niveau ? L'ensemble de niveau 0 a-t-il une tangente horizontale en $(0, 0)$?
3. La courbe de niveau 0 est-elle le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$? Le graphe d'une fonction $x = \psi(y)$?
4. Montrer que $(0, -1)$ est sur la courbe de niveau 0, et que le théorème des fonctions implicites s'applique pour écrire $y = \varphi(x)$ sur cette courbe près de $(0, -1)$.
5. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$.
6. On s'intéresse maintenant à l'ensemble de niveau $2/27$. Montrer que l'ensemble de niveau $2/27$ est la réunion de deux courbes, à savoir la droite d'équation $x + y + 1/3 = 0$ et la conique d'équation

$$9(x^2 + y^2) + 6(x + y) - 9xy - 2 = 0.$$

7. Montrer que la droite et la conique du point précédent s'intersectent en deux points. L'ensemble de niveau $2/27$ admet-elle une tangente en ces points ? En quels points admet-elle une tangente ?

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, et $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ la norme correspondante. On note $S = \{u \in \mathbb{R}^n | \, ||u|| = 1\}$ la sphère unité.

Soit enfin $x \in \mathbb{R}^n$, et $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(y) = \langle x, y \rangle^2 - ||x|| \, ||y||^2,$$

$$g(y) = ||y||^2 - 1.$$

1. Montrer que g est différentiable en tout $y \in \mathbb{R}^n$, et calculer $dg(y)$ pour un $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque.
2. Montrer que f est différentiable en tout $y \in \mathbb{R}^n$, et calculer $df(y)$ pour un $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque.
3. Montrer que f atteint sa borne supérieure sur S. Dans la suite, on note y_0 un point de S en lequel f atteint son maximum sur S.
4. Montrer que le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange s'applique au point y_0, pour les extrema de f sous la contrainte $g = 0$.
5. En déduire l'existence d'un réel λ tel que

$$(\lambda + ||x||^2) y_0 = \langle x, y_0 \rangle x.$$

6. Montrer que $f(y) \leq 0$ pour tout $y \in S$ (on pourra distinguer deux cas, selon que $\langle x, y_0 \rangle$ soit nul ou non).
7. Montrer que $f(y) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (étant donné un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul, on pourra considérer $y/||y||$).
8. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Cauchy-Schwarz.