Université Joseph Fourier 2015-16
Calcul Différentiel L3 option B

Contrôle continu n° 1 - corrigé succinct
17 février 2016

Exo 2

Pour $(x,y) \neq 0$, $|f(x,y)| = |xy||\frac{y^2}{x^4+y^2}| \leq |xy|$ donc on obtient une fonction continue en posant $f(0,0) = 0$. Pour cette fonction, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et sont nulles car f est nulle sur les axes de coordonnées.

Montrer la différentiabilité en $(0,0)$ revient donc à montrer que $f(x,y) = o(||(x,y)||)$ pour $(x,y) \to (0,0)$. Ceci suit de

$$|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{xy^3}{x^4+y^2}| = \frac{1}{2}\frac{2|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

et cette dernière fonction tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3\frac{y^2-3x^4}{(x^4+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^2\frac{3x^4+y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

qui sont clairement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tester la continuité en $(0,0)$, on vérifie si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$, ce qui est le cas puisque

$$|y^3\frac{y^2-3x^4}{(x^4+y^2)^2}| \leq \frac{|y|^5}{(x^4+y^2)^2} + 3\frac{x^4|y|^3}{(x^4+y^2)^2}$$

et

$$\frac{|y|^5}{(x^4+y^2)^2} = |y|\left(\frac{y^2}{x^4+y^2)}\right)^2 \leq |y|,$$

$$\frac{x^4|y|^3}{(x^4+y^2)^2} = |y|\frac{x^4}{x^4+y^2)}\frac{y^2}{x^4+y^2} \leq |y|.$$

De même on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En conclusion, f est C^1 sur tout $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x,y) \neq 0$, $|g(x,y)| = |x||\frac{x^2y}{x^4+y^2}| \leq \frac{1}{2}|x|$ donc on obtient une fonction continue en posant $g(0,0) = 0$. Comme ci dessus, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existent et sont nulles.

Montrer la différentiabilité de g en $(0,0)$ reviendrait à montrer que $g(x,y) = o(||(x,y)||)$ pour $(x,y) \to (0,0)$. Mais en prenant faisant tendre (x,y) vers $(0,0)$ le long de la parabole $y = x^2$, on voit que

$$\frac{g(x,x^2)}{\sqrt{x^2+(x^2)^2}} = \frac{x}{2|x|\sqrt{1+x^2}},$$

et cette fonction n'a pas de limite quand $x \to 0$ (ses limites à gauche/droite valent $\pm 1/2$).

Donc g n'est pas différentiable en $(0,0)$. Elle est en revanche C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exo 3

On pose $g(u,v) = f(u,uv)$. On a alors

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv),$$

ce qui est équivalent (comme on suppose $u = x > 0$) à

$$u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + uv\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv),$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Comme le changement de variables est bijectif sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, ceci est aussi équivalent à

$$x\frac{\partial g}{\partial u}(x,\frac{y}{x}) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

En particulier, l'équation de l'énoncé est équivalente à

$$u\frac{\partial g}{\partial u} = u\sqrt{1+v^2},$$

ou encore (puisque $u \neq 0$)

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \sqrt{1+v^2}.$$

Les solutions sont données par $g(u,v) = u\sqrt{1+v^2} + \varphi(v)$, ou encore

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y/x).$$

avec φ de classe C^1.

Exo 4

1) Comme ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t\,{}^tM = {}^tMM$. Pour toute matrice M de déterminant non nul, $\det(\varphi(M)) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2 > 0$, donc la matrice diagonale $(-1,1,\dots,1)$ n'est pas dans l'image de φ.

2) Noter que ${}^t(M+H)(M+H) = {}^tMM + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH$, et que $H \mapsto {}^tMH + {}^tHM$ est linéaire. Par ailleurs, $||\,{}^tHH|| \leq ||\,{}^tH||\,||H|| \leq ||H||^2$, donc le terme ${}^tHH$ est un $o(||H||)$.

Dans l'argument ci-dessus, on suppose $||\cdot||$ sous-multiplicative, par exemple on peut prendre la norme déduite de la norme euclidienne. Le fait que $||\,{}^tH|| = ||H||$ n'est pas complètement évident... Si λ est valeur propre de ${}^tHH$, et que v est un vecteur propre de norme 1 associé à cette valeur propre, $||Hv||^2 = {}^tv\,{}^tHHv = \lambda$. Ceci dit que $||H||^2$ est la valeur propre maximale de ${}^tHH$; en particulier $||H|| = ||\,{}^tH||$.

On obtient finalement que φ est différentiable en M, de différentielle donnée par

$$d\varphi(M)(H) = {}^tMH + {}^tHM.$$

3) Si $M = Id$, on a $d\varphi(I)(H) = H + {}^tH$, donc le noyau est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n, qui est de dimension $n(n-1)/2$.

4) Si S est une matrice symétrique quelconque, $d\varphi(A)(\frac{1}{2}AS) = \frac{1}{2}\,{}^tAAS + \frac{1}{2}\,{}^tS\,{}^tAA = S$.