Université Joseph Fourier — 2015-16
Calcul Différentiel — L3 option B

Contrôle continu n° 1

17 février 2016

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barême indicatif : 2/8/4/8***

Exercice 1. (question de cours) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. Montrer que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Exercice 2. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définies par $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^4+y^2}$ $g(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$, respectivement.

1. Montrer que les fonctions f et g se prolongent en des fonctions continues sur tout $\mathbb{R}^2$. Donner la valeur de ces extensions en $(0,0)$.
2. Les extensions continues de f et de g sont-elles différentiables en $(0,0)$? Sont-elles C^1 ?

Exercice 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

pour tout (x,y). *Indication : faire le changement de variables $x = u, y = uv$, pour $u > 0$.*

Exercice 4. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles $n \times n$, et soit $\mathcal{S}_n$ le sous-ensemble des matrices symétriques, $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n :\ {}^tM = M\}$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ définie par

$$\varphi(M) = {}^tMM.$$

1. Montrer que l'image de φ est contenue dans $\mathcal{S}_n$. L'image de φ est-elle tout $\mathcal{S}_n$? (*indication : penser au cas $n = 1$*).
2. Montrer que φ est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n$, et décrire sa différentielle.
3. Déterminer le noyau de $d\varphi(I_n)$, où I_n est la matrice identité. Quelle est la dimension de ce noyau ?
4. Montrer que si $\varphi(A) = I_n$, alors $d\varphi(A)$ est égale à $\mathcal{S}_n$.