Université Joseph Fourier — 2014-15
Calcul Différentiel — L3 option B

Contrôle continu n° 1

12 février 2015

Durée : 1h. Documents et téléphones interdits. ***Barême indicatif : 4/4/4***

Exercice 1. (Questions de cours) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$.

1. Rappeler la définition de la différentiabilité de f en a.
2. Montrer que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Exercice 2.

1. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(u, v) = (u + v, -3v).$$

   Montrer que φ est un difféomorphisme de classe C^1 (c'est-à-dire une bijection de classe C^1, dont la réciproque est également de classe C^1).

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, et $g = f \circ \varphi$. Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. En déduire toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée, et $U = E \setminus \{0\}$. Soit $f : U \to E$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{||x||^2}.$$

Montrer que f est différentiable, et montrer que pour tout $x \in U$, et pour tout $h \in E$,

$$df(x)(h) = \frac{h}{||x||^2} - \frac{2\langle x, h \rangle x}{||x||^4}.$$