Contrôle continu 2
mardi 10 avril

Durée 2 heures. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. Les réponses doivent être justifiées, la correction et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Soient U l'ouvert $]-1,1[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon U\to U$ l'application $(t,x)\mapsto\big(t,x-\sin(tx)\big)$.

1. Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de U.
2. Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme de U sur son image $f(U)=U$.
3. Donner l'image m par f du point $(\frac{\pi}{4},2)$ de U.
4. Donner le développement de Taylor à l'ordre 1 de f^{-1} au voisinage de m.

Exercice 2

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction $(x,y)\mapsto\sin y+xy^4+x^2$. On note C l'ensemble de niveau $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)=0\}$.

1. On note J_0 l'intersection de C avec la droite $x=0$. Quels sont les points de J_0 ?
2. Pour quels points m de J_0 existe-t-il un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 0, un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant m, et une fonction C^∞ $\varphi_m\colon V\to\mathbb{R}$ tels que
$$((x,y)\in U \text{ et } f(x,y)=0) \iff (x\in V \text{ et } \varphi_m(x)=y)?$$
3. En un tel point : que vaut $\varphi_m(0)$? y a-t-il unicité sur V de la fonction φ_m ?
4. On prend $m=(0,\pi)$ et on note $\varphi_m=\varphi$. Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 autour de 0.
5. Dessiner l'allure de C au voisinage du point $(0,\pi)$.

Exercice 3

On considère le sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ donné par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$, où $f(x, y, z) = x + x^4 + y^2 + z^2$.

1. Calculer le gradient de f.
2. Déterminer l'ensemble U des points de S au voisinage desquels, *par le cours*, S est localement le graphe d'une fonction ψ de classe C^1 $(y, z) \mapsto x = \psi(y, z)$.
3. Quand $m = (x, y, z) \in U$, calculer le gradient de la fonction ψ. Peut-il s'annuler ? Si oui, pour quelles valeurs de y et z ?
4. Quelle est la propriété correspondante du plan tangent à S en m ?
5. Montrer que S admet un plan tangent en tout point, et donner une équation pour ce plan en un point quelconque $(a, b, c) \in U$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. On considère les parties B, resp. C, de $\mathbb{R}^2$ formées des points (x, y) tels que $x^2 - xy + y^2 \leq 5$, resp. tels que $x^2 - xy + y^2 = 5$. On pose $U = B \setminus C$.

1. Montrer que la fonction f admet un minimum dans B, et de même dans C.
2. Déterminer les points de C en lesquels $f_{|C}$ atteint son minimum.
3. Déterminer, s'il en existe, les points critiques de f dans U.
4. En quel(s) point(s) de B la fonction f admet-elle un minimum ?

Exercice 5

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires d'ordre n.
2. On considère l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

   (a) Donner la solution générale de cette équation.
   (b) Écrire un système différentiel $Y' = A.Y$ pour le vecteur colonne $Y(t)$ transposé de $(y(t), y'(t))$, qui soit équivalent à l'équation $\mathcal{E}$.
   (c) En déduire, en justifiant, le calcul de la matrice e^{tA} correspondante.