Contrôle continu 1

Durée 2 heures. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. Les réponses doivent être justifiées, la correction et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

1. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une application, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et soit $a \in U$.
   (a) Donner la définition de la différentiabilité de f en a.
   (b) Donner la définition de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (où $1 \leq i \leq m$), et montrer (sans référence au cours) que si f est de classe C^1 sur U, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U et est continue en a.
   (c) Exprimer alors la différentielle de f en a à l'aide de ses dérivées partielles en a.
2. Soit $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
   (a) Démontrer que L est différentiable en tout point x de $\mathbb{R}^m$, et calculer sa différentielle au point x.
   (b) Montrer que L est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^m$. Que vaut $d^2L(x)$?

Exercice 2

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 de la variable (x,t). On définit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(u,v) = f\Big(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\Big)$.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en (u,v), puis $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$, en terme des dérivées partielles de f en un point convenable.

Exercice 3

Soient $f : U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point, et m une constante réelle. On dit que f est *homogène de degré* m si pour tout réel $\lambda > 0$, et pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x). \tag{1}$$

1. On suppose f homogène de degré m. Soit $x \in U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En dérivant (1) par rapport à λ, montrer que $df(x)(x) = mf(x)$.
2. On suppose de plus que f est deux fois différentiable en tout point. Obtenir alors l'expression de $d^2f(x)(x,x)$ en fonction de m et $f(x)$.
3. On suppose que $df(x)(x) = mf(x)$, pour tout $x \in U$. En dérivant l'application $\psi\colon \lambda \mapsto \lambda^{-m} f(\lambda x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, montrer que f est homogène de degré m.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 3yz + 2z^3$.

1. Justifier que f est de classe C^2. Expliciter sa différentielle seconde au point $m = (a,b,c)$.
2. Quels sont les deux points critiques de f ?
3. f admet-elle un extremum local en 0 ? Si oui, de quel type ?
4. Même question en m_1 l'autre point critique de f.
5. f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^3$? un minimum global ?