Calcul différentiel
Contrôle continu 2

Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. Durée 2 heures. Les réponses non justifiées ne sont pas comptabilisées.

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x\, e^z + y^2\, e^x + 1$$

et S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. On note $m = (a, b, c)$ un point quelconque de S.

1. Montrer qu'au voisinage de (a, b, c), S est localement le graphe d'une fonction φ de classe C^1 : $(x, y) \mapsto z = \varphi(x, y)$.
2. Que vaut la différentielle de φ en (a, b) ?
3. Donner une équation du plan tangent à S au point m.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto y^2 + y - x^3 + x^2$.

1. Montrer que la ligne de niveau $f(x, y) = -\frac{1}{4}$ contient un point où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet un minimum local.
2. En quel(s) point(s) cette ligne de niveau admet-elle une tangente verticale ? Au voisinage de quels points peut-on la paramétrer par une fonction de x de classe C^1 ?

On s'intéresse maintenant à $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f\,(x, y) = 0\}$.

3. Montrer qu'il existe : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 1, J_0, resp. J_{-1} des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui contiennent 0 resp. -1, et des fonctions φ_0 et φ_{-1} de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$, tels que

$$((x, y) \in I \times J_0 \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in I \text{ et } \varphi_0(x) = y)$$

$$\text{et } ((x, y) \in I \times J_{-1} \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in I \text{ et } \varphi_{-1}(x) = y)\,.$$

4. Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ_0 au voisinage de 1.

5. Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage du point $(1,0)$?

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie), dont on note $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée. Un réel $k>0$ étant donné, on considère une fonction $f\colon E\to E$ de classe C^1 telle que

$$\forall (x,y)\in E^2, \quad \langle f(x)-f(y), x-y\rangle \geq k\,||x-y||^2 \,.$$

1. Montrer que pour tous x,h dans E, on a $\langle df(x)(h), h\rangle \geq k\,||h||^2$ (on pourra écrire l'inégalité ci-dessus aux points$(x+t.h, x)$ de E^2, où $t\in\mathbb{R}^*$).
2. Montrer que pour tout $x\in E$, $df(x)$ est injective.
3. Justifier que $f(E)$ est un ouvert de E, et montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur $f(E)$.

Exercice 4

Dans le plan euclidien usuel, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation :

$$13x^2-10xy+13y^2=36\,.$$

Montrer qu'il existe un ou des points de $\mathcal{E}$ qui réalisent le minimum sur $\mathcal{E}$ de la distance à l'origine. Le(s) déterminer.

Exercice 5

1. Donner une solution de l'équation différentielle (E)

$$(x+1)y'+(x-1)y=(x+1)^3\,e^x$$

qui vérifie $y(0)=1$.

2. Quelles sont les solutions de (E) **sur** $\mathbb{R}$ qui vérifient $y(0)=1$?