Calcul différentiel

Contrôle continu 1

Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. Durée 2 heures. Les réponses non justifiées ne sont pas comptabilisées.

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \;\; et \;\; f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \;\; si \; (x,y) \neq (0,0)\,.$$

1. L'application f est-elle continue en $(0,0)$?
2. L'application f admet-elle une dérivée directionnelle en $(0,0)$ selon tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$?
3. L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

1. Soit $N : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in E,\ N(x) = \|x\|^2$. Montrer que l'application N est différentiable sur E et calculer dN.
2. Soit $c : \mathbb{R} \to E$ une application de classe C^1 vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ \|c(t)\| = \|c(0)\|$. Montrer que pour tout réel t les vecteurs $c(t)$ et $c'(t)$ sont orthogonaux.
3. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in E,\ f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$.
   (a) Montrer que l'application f est différentiable sur E et calculer df.
   (b) Vérifier que 0 est un point critique pour f. Peut-on affirmer que la forme bilinéaire $d^2 f(0)$ est positive ? négative ?
   (c) Soit $\varphi : E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ donnée par $\varphi(x) = < x, . >$ où $< x, . >$ désigne l'application linéaire qui à un vecteur k associe $< x, k >$. Montrer que φ est différentiable et déterminer $d\varphi$.
   (d) Soit $g : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in E,\ g(x) = (\sqrt{1 + \|x\|^2})^{-1}$. Montrer que l'application g est différentiable sur E et calculer dg.
   (e) Montrer que l'application f est deux fois différentiable sur E et expliciter $d^2 f$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + z^2 + yz^2$. La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit son *laplacien* Δf par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on note D la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, S la sphère unité, et $\overline{D}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier l'existence des réels $m = \max_{x\in S} f(x)$ et $M = \max_{x\in\overline{D}} f(x)$.
2. Comparer m et M.
3. On suppose qu'il existe $x \in D$ tel que $f(x) \geq m$.
   (a) Montrer qu'il existe x_0 **dans D** tel que $f(x_0) = M$.
   (b) Montrer que x_0 est un point critique de f. Que peut-on dire du signe de $\Delta f(x_0)$? (on interprétera Δf en terme de Hess(f))
   (c) En déduire que, si on a $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in D$, alors :
   $$\text{pour tout } x \in D, f(x) < m\,.$$
4. On suppose maintenant que Δf est identiquement nul sur D.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \epsilon\big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)$.
   Montrer que pour tout $x \in D$, on a $\Delta g(x) > 0$.
   (b) Déterminer $\max_{x\in S} g(x)$.
   (c) En utilisant 3, montrer que $f(x) \leq m$ pour tout $x \in D$, autrement dit que $M \leq m$, et ainsi $m = M$.