Exo 16

(i) ⇒ (ii)

$\mathring{A}$ est un ouvert de X', donc $f^{-1}(\mathring{A})$ est ouvert ; donc $f^{-1}(\mathring{A}) \subset (f^{-1}(A))^\circ$.

(ii) ⇒ (iii)

$$X \setminus f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(X' \setminus \overline{A}) = f^{-1}((X' \setminus A)^\circ)$$
$$\subset f^{-1}(X' \setminus A)^\circ = f^{-1}(A)^\circ = X \setminus \overline{f^{-1}(A)}$$

$$\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}).$$

(iii) ⇒ (i)

$V \subset X'$ ouvert, $V = V^\circ$.

$$X' \setminus V = \overline{X' \setminus V}$$
$$\overline{f^{-1}(V)} = \overline{f^{-1}(X' \setminus V)} \subset f^{-1}(\overline{X' \setminus V}) = f^{-1}(X' \setminus V)$$
$$f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(X' \setminus V) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(V)^\circ \subset f^{-1}(V)$$

d'où $f^{-1}(V) = f^{-1}(V)^\circ$, et $f^{-1}(V)$ ouvert.

Exo 17

1) Supp. χ_A continue en x.

Si $x \in A$, $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ ouvert, $A = A^\circ$

$x \in A^\circ$, $x \notin \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$

Si $x \notin A$, $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$ ouvert, A fermé $A = \overline{A}$

$\partial A = A \setminus A^\circ$, $x \notin \partial A$.

Supp. $x \notin \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Alors $x \in A^\circ$ ou $x \notin \overline{A}$.

Si $x \in A^\circ$, $\chi_A(x) = 1$, $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ est un voisinage de x

Si $x \notin \overline{A}$, $x \notin A$, $\chi_A(x) = 0$. $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$ contient $x \setminus \overline{A}$ = voisinage de x.

2) $\chi_A^{-1}(\{0\})$ ouvert, $\chi_A^{-1}(\{1\})$ ouvert

càd A et $X \setminus A$ ouvert

càd A est ouvert et fermé

(et réciproquement).

3) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit $\phi : X \to \{0,1\}$ continue

$X \setminus \phi^{-1}(\{1\}) = \phi^{-1}(\{0\})$, $\phi^{-1}(\{1\})$ ouverts

$\to$ ouverts et fermés

$\phi^{-1}(\{0\}) = \phi$, $\phi^{-1}(\{1\}) = X$

ou $\phi^{-1}(\{0\}) = X$, $\phi^{-1}(\{1\}) = \phi$

càd $\phi \equiv 1$ ou $\phi \equiv 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit A ouvert et fermé

χ_A continue par (2), donc

constante, donc

$A = \phi$ (si $\chi_A \equiv 0$)

ou $A = X$ (si $\chi_A \equiv 1$).