## Exo 10

1) $E\setminus \mathring{A} = \overline{E\setminus A}$

- $\mathring{A}$ ouvert, $E\setminus\mathring{A}$ fermé, et contient $E\setminus A$

$(\mathring{A}\subset A \to E\setminus A \subset E\setminus \mathring{A})$

$\to \overline{E\setminus A} \subset E\setminus\mathring{A}$

- $E\setminus\mathring{A} \subset \overline{E\setminus A}$ ?

$\underbrace{E\setminus(\overline{E\setminus A})}_{\text{ceci est un ouvert, contenu dans } A} \subset \mathring{A}$

$\left(\begin{array}{c} E\setminus A \subset \overline{E\setminus A} \\ E\setminus(\overline{E\setminus A}) \subset A \end{array}\right)$ . $E\setminus(\overline{E\setminus A}) \subset \mathring{A}$.

2) $\bar{A}$ fermé, $E\setminus\bar{A}$ ouvert, contenu dans $E\setminus A$, d'où $E\setminus\bar{A}\subset(E\setminus A)^\circ$

$A\subset\bar{A} \to E\setminus\bar{A}\subset E\setminus A$

$E\setminus\bar{A} \supset (E\setminus A)^\circ$ ?

$\Leftrightarrow \bar{A} \subset E\setminus(E\setminus A)^\circ$

$(E\setminus A)^\circ$ ouvert, $E\setminus(E\setminus A)^\circ$ fermé qui contient $A$?

$(E\setminus A)^\circ \subset E\setminus A$

$A\subset E\setminus(E\setminus A)^\circ$

donc $E\setminus(E\setminus A)^\circ \supset \bar{A}$.

## Exo 12

$C\subset D \Rightarrow C\subset \underbrace{\bar{D}}_{\text{fermé qui contient } C}$

$\to \bar{C}\subset\bar{D}$.

- $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

$\bar{A}\cup\bar{B}$ fermé, contient $A\cup B \to \overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$

$A\subset A\cup B \to \bar{A}\subset\overline{A\cup B}$
$B\subset A\cup B \quad \bar{B}\subset\overline{A\cup B}$ $\to \bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$.

- $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$

$A\cap B\subset A \to \overline{A\cap B}\subset\bar{A}$
$A\cap B\subset B \to \overline{A\cap B}\subset\bar{B}$, $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$

$\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \emptyset$

$\bar{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

- $(A\cup B)^\circ \supset \mathring{A}\cup\mathring{B}$

$A\subset A\cup B$

$\mathring{A}\subset (A\cup B)^\circ$ et $B^\circ\subset(A\cup B)^\circ$

d'où $A^\circ\cup B^\circ\subset (A\cup B)^\circ$

$\left(\begin{array}{l} C\subset D \\ \mathring{C} \text{ ouvert contenu dans } D \\ \to \mathring{C}\subset \mathring{D}. \end{array}\right)$

$\mathring{\mathbb{Q}}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\phi\cup\phi=\phi$

$(\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))^\circ=\mathbb{R}^\circ=\mathbb{R}$

autre façon : utiliser exo 12

$E\setminus(A\cup B)^\circ=\overline{E\setminus(A\cup B)}$

$=\overline{(E\setminus A)\cap(E\setminus B)}$

$\subset\overline{E\setminus A}\cap\overline{E\setminus B}=$

$(E\setminus A^\circ)\cap(E\setminus B^\circ)$

$A^\circ\cup B^\circ\subset(A\cup B)^\circ.$

- $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$

$E\setminus(A\cap B)^\circ=\overline{E\setminus(A\cap B)}$

$=\overline{(E\setminus A)\cup(E\setminus B)}$

$=\overline{E\setminus A}\cup\overline{E\setminus B}$

$=(E\setminus A^\circ)\cup(E\setminus B^\circ)$

$=A^\circ\cap B^\circ.$

- $\partial(A\cup B)$ , $\partial A\cup\partial B$ $\qquad \overline{A\cup B}\setminus(A\cup B)^\circ$

$A=[0,1]$ $\qquad A\cup B=[0,2]$

$B=[1,2]$ $\qquad \partial(A\cup B)=\{0,2\}\subset\{0,1,2\}=\partial A\cup\partial B.$

$\partial(A\cup B)=\overline{A\cup B}\setminus(A\cup B)^\circ\subset(\bar{A}\cup\bar{B})\setminus(A^\circ\cup B^\circ)\subset(\bar{A}\setminus A^\circ)\cup(\bar{B}\setminus B^\circ)=\partial A\cap\partial B$

$x\in\bar{A}$ ou $x\in\bar{B}$
et $x\notin A^\circ$, $x\notin B^\circ$

$(x\in\bar{A},x\notin A^\circ)$
ou $(x\in\bar{B},x\notin B^\circ)$

- $\partial(A\cap B)$ $\qquad \partial A\cap\partial B$

$A=]0,1[$, $B=]1,2[$.

$A\cap B=\phi$, $\partial(A\cap B)=\phi.$

$\partial A\cap\partial B=\{1\}.$

$\overline{A\cap B}\setminus(A\cap B)^\circ\subset$

$(\bar{A}\cap\bar{B})\setminus(A^\circ\cap B^\circ)\supset(\bar{A}\setminus A^\circ)\cap(\bar{B}\setminus B^\circ)$

$x\in\bar{A}$ et $x\in\bar{B}$,
et $[x\notin A^\circ$ ou $x\notin B^\circ]$

$x\in\bar{A}$ et $x\notin A^\circ$
et $x\in\bar{B}$ et $x\notin B^\circ$

$A=\{0\}$ $\qquad B=]-1,1[$

$A\cap B=\{0\}$, $\partial(A\cap B)=\{0\}.$

$\partial A\cap\partial B=\phi$