Exo 6 1) $\mathcal{B} = \{B_j, j \in \mathbb{N}\}$ base d'ouverts

on choisit $x_j \in B_j$

Alors tout ouvert non vide contient un B_j, donc un x_j

2) Soit $\{x_j, j \in \mathbb{N}\}$ dense dans X, d.

$\{B(x_j, r_k) \mid j \in \mathbb{N}, r_k \in \mathbb{Q}_+^*\}$ forme base

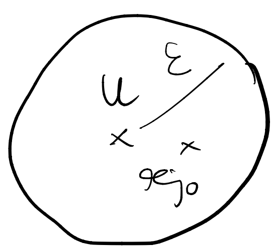
Soit $U \subset X$ un ouvert. Soit $J \subset \mathbb{N}$, $J = \{j \mid x_j \in U\}$.

Pour $j \in J$ fixé, soit $R_j = \{r \in \mathbb{Q}_+^* \mid B(x_j, r) \subset U\}$.

Mq. $U = \bigcup_{\substack{(j,r) \in J \times \mathbb{Q}_+^* \\ r \in R_j}} B(x_j, r)$

- L'inclusion $\supset$ est claire.
- si $u \in U$, on choisit $\varepsilon > 0$ t.q. $B(u, \varepsilon) \subset U$ et $j_0 \in J$ t.q. $x_{j_0} \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$.

$d(x_{j_0}, u) < \frac{\varepsilon}{2}$.



on prend $r \in \mathbb{Q}_+^*$ t.q. $r < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $u \in B(x_{j_0}, r)$

et $B(x_{j_0}, r) \subset B(u, \varepsilon)$ car si $d(x_{j_0}, v) < r$,

$d(u, v) \leq d(u, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

d'où $r \in R_{j_0}$, ce qui donne $u \in \bigcup_{\substack{(j,r) \in J \times \mathbb{Q} \\ r \in R_j}} B(x_j, r)$

Rem: Si un espace topologique est à base dénombrable, il est séparable (prendre un point dans chaque ouvert de la base!)

mais la réciproque est fausse.

exemple: topo sur $\mathbb{R}$, ouverts = réunions d'intervalles $[a, b[$, $a < b$.
(c'est une topo...)

assez clair que $\mathbb{Q}$ est dense

mais pas à base dén; Soit $\mathcal{B}$ une base (tout ouvert est réunion d'élts de $\mathcal{B}$).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[x, x+1[$ est ouvert, on choisit $B_x \in \mathcal{B}$, $B_x \subset [x, x+1[$.

si $x < y$, $x \in B_x$ mais $x \notin B_y$,

donc $B_x \neq B_y$.

$\mathbb{R}$ non-dénombrable

$\longrightarrow \mathcal{B}$ est non dénombrable