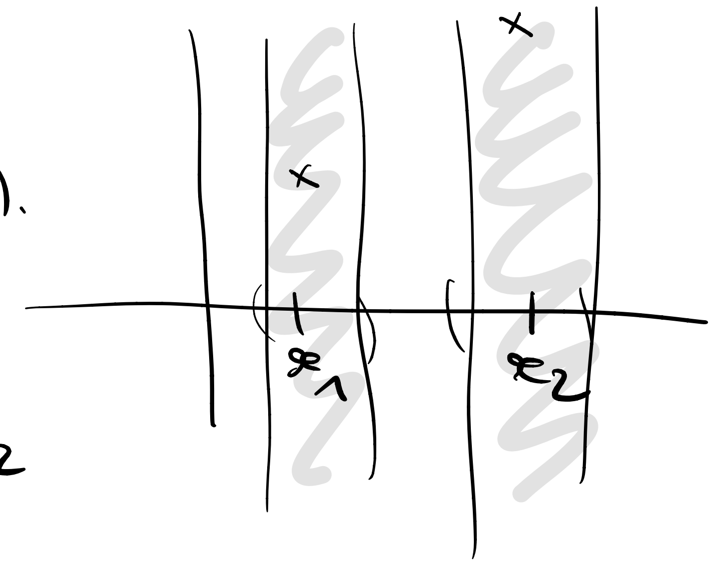
Exo 20

1) $\Rightarrow$ Soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

Si $x_1 \neq x_2$, on prend U_1, U_2 ouverts qui séparent x_1, x_2



$p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times E_2$

$p_1^{-1}(U_2) = U_2 \times E_2$ séparent (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

(si $y_1 \neq y_2$ on remplace E_1 par E_2).

$\Leftarrow$ les projections sont ouvertes.

Si U, V séparent (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

alors $p_1(U), p_1(V)$ séparent x_1, x_2

$p_2(U), p_2(V)$ séparent y_1, y_2.

2) $F : E_1 \to E_2 \times E_2$ continue

$x \mapsto (f(x), g(x))$

car f et g le sont.

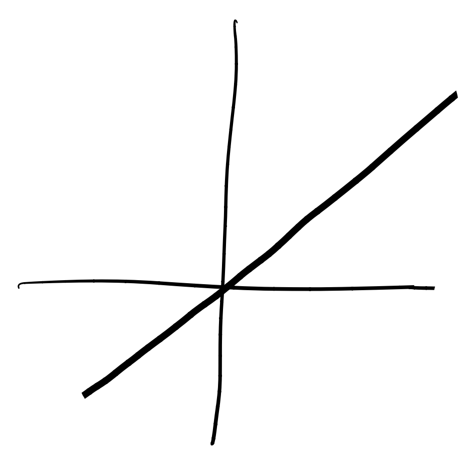
$\{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\} = F^{-1}(\Delta)$

$\Delta = \{(y, z) \in E_2 \times E_2 \mid y = z\}$

($U \times V \subset E_2 \times E_2$

$f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$

$\to$ OK).



Soit $(u, v) \notin \Delta$.
on prend des ouverts U, V de E_2
t.q. $U \cap V = \emptyset$
$u \in U, v \in V$
(E_2 séparé)

$\to (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$

i.e. $(E_2 \times E_2) \setminus \Delta$ ouvert, càd Δ fermé.

3) $Gr_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E_1\} \subset E_1 \times E_2$.

$E_1 \times E_2 \xrightarrow{G} E_2 \times E_2$ continue

$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$

$$\begin{array}{cc} E_1 \times E_2 & (x, y) \\ \downarrow & \downarrow \\ E_2 \times E_2 & (f(x), y) \end{array}$$

$Gr_f = G^{-1}(\Delta)$

Δ : diagonale dans $E_2 \times E_2$.