Exo 18

- Supposons f cont en tout $x \in A$.

  $f|_A : A \to Y$ continue ?

  Soit $V \subset Y$ ouvert. $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$

  si $A \cap f^{-1}(V)$ est vide, c'est un ouvert.

  sinon, soit $x \in A \cap f^{-1}(V)$.

  alors $f(x) \in V$, et V est un vois de $f(x)$

  donc $f^{-1}(V) \supset U \ni x$ pour U ouvert de X

  $x \in \underbrace{U \cap A}_{\text{ouvert de } A \text{ (topo induite)}} \subset f^{-1}(V) \cap A$

- Supposons $f|_A$ continue

  soit $x \in \mathring{A}$, $x \in U \subset \mathring{A} \subset A$ pour U ouvert de X

  Soit V un vois de $f(x)$.

  $A \cap f^{-1}(V) = f|_A^{-1}(V)$ vois de x pour topo sur A

  $\exists\, O \subset X$ t.q. $x \in O \cap A \subset f^{-1}(V) \cap A$

  $x \in f^{-1}(V) \cap \mathring{A}$ voisinage de x pour X

$X = \mathbb{R}$

$A = [0,1]$

est continue sur $\mathring{A} =]0,1[$

mais pas en tout point de $[0,1)$

Exo 19

$f : X \to Y$ continue,

Soient $y_1 \neq y_2$ dans $\mathrm{Im}(f)$, $y_j = f(x_j)$.

Soient $U_1 \ni y_1$, $U_2 \ni y_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

U_j ouverts

$\underset{x_1}{\underset{\cup}{f^{-1}}}(U_1)$ ouvert, $\underset{x_2}{\underset{\cup}{f^{-1}}}(U_2)$ ouvert, non vides

$X \setminus f^{-1}(U_1)$ fini

$X \setminus f^{-1}(U_2)$ fini

X infini $\longrightarrow f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$, contrad.