Exo 14

$\overline{A}\times\overline{B} = (\overline{A}\times E_2)\cap(E_1\times\overline{B})$ = fermé qui contient $A\times B$

d'où $\overline{A\times B}\subset \overline{A}\times\overline{B}$

$\overline{A}\times\overline{B}\subset\overline{A\times B}$? $F\subset E_1\times E_2$ fermé contenant $A\times B$.

Soit $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$. Soit $U\times V$ un ouvert de base de $E_1\times E_2$ qui contient (x,y)

$x\in\overline{A}$, donc $U\cap A\neq\emptyset$

$y\in\overline{B}$ donc $V\cap B\neq\emptyset$

Soient $u\in U\cap A$, $v\in V\cap B$ $(u,v)\in(U\times V)\cap(A\times B)$

tout vois de (x,y) rencontre $A\times B$, $(x,y)\in\overline{A\times B}$.

$\mathring{A}\times\mathring{B}$ = ouvert contenu dans $A\times B$

$\to (A\times B)^\circ\subset \mathring{A}\times\mathring{B}$.

Si $U\subset A\times B$ est ouvert,

$\pi_1(U)\subset A$ est ouvert

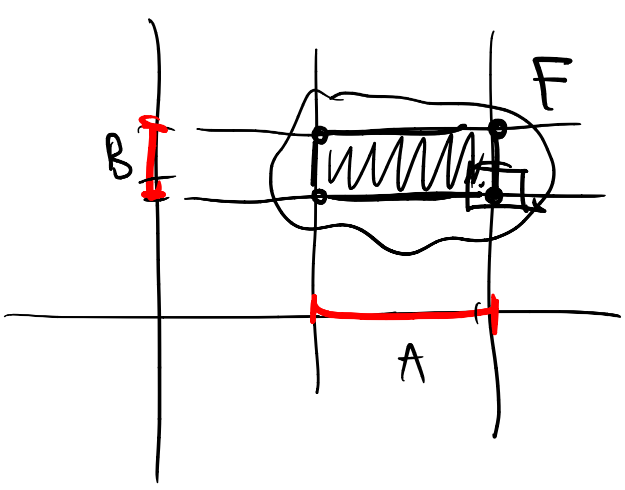
donc $\pi_1(U)\subset\mathring{A}$

de même $\pi_2(U)\subset\mathring{B}$

$\rightsquigarrow U\subset\mathring{A}\times\mathring{B}$

en particulier

$(A\times B)^\circ\subset\mathring{A}\times\mathring{B}$



$(A\times B)^\circ=\mathring{A}\times\mathring{B}$

$(\overline{A}\times\overline{B})\setminus(\mathring{A}\times\mathring{B}) = \{(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B} \mid x\notin\mathring{A}$ ou $y\notin\mathring{B}\}$

$= (\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B)$.

Si $\partial(A\times B)=\partial A\times\partial B$,

$(\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B) = \partial A\times\partial B$

$\partial A\times\partial B\subset\partial A\times\overline{B}$ $\rightsquigarrow$ égalité

$\partial A\times\partial B\subset\overline{A}\times\partial B$ $\to$ égalité

$\partial B=\overline{B}$ et $\partial A=\overline{A}$

$\mathring{B}=\emptyset$ $\mathring{A}=\emptyset$.