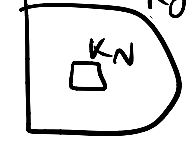


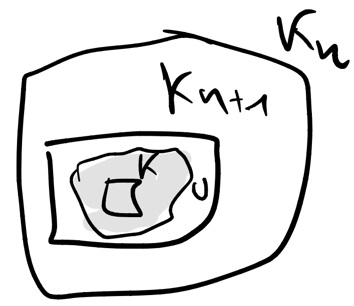
Ex 8.10

1) $K=\bigcap_n K_n$. On a $K_0 \subset K \cup (E\setminus K_1)\cup(E\setminus K_2)\cup\dots$

Supposons par l'absurde que $K=\emptyset$. Alors $K_0\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E\setminus K_n)$ donne un recouvrement de K_0 (qui est compact) par des ouverts. On peut extraire un sous-recouvrement fini, $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $K_0\subset(E\setminus K_1)\cup\dots\cup(E\setminus K_N) = E\setminus K_N$ (car $K_{j+1}\subset K_j$ pour tout j), d'où $K_0\cap K_N=\emptyset$ mais $K_N\subset K_0$, d'où $K_N=\emptyset$ contradiction.

2) Soit U un ouvert t.q. $K\subset U$. On considère les ouverts U_n

$U_n = E\setminus K_n$ (suite croissante d'ouverts)



$$\bigcup_n U_n = \bigcup_n (E\setminus K_n) = E\setminus\bigcap_n K_n = E\setminus K.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. $K_n\subset U\cup(E\setminus K_{n+1})\cup(E\setminus K_{n+2})\cup\dots$ recouvrement ouvert

(on extrait un sous-recouvrement fini) $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $K_n\subset U\cup(E\setminus K_{n+1})\cup(E\setminus K_{n+2})\cup\dots\cup(E\setminus K_N)$
($N\geq n+1$)

$(E\setminus K_{n+1})\subset(E\setminus K_N)$

$= U\cup(E\setminus K_N)$

($N\geq n+1>n$)

On a alors $K_N\subset K_n\subset U\cup(E\setminus K_N)$ mais $K_N\cap(E\setminus K_N)=\emptyset$ donc $K_N\subset U$.

3) Soit $m\in\mathbb{N}$. pour $n\geq m$, $x_n\in K_n\subset K_m$ d'où $x\in K_m$ (K_m est compact donc fermé)

Comme m est arbitraire, on a $x\in\bigcap_m K_m = K$

4) $(\emptyset\neq)K_n = f^n(E)$ compact. Noter que $\forall n$, $f(K_n)=K_{n+1}$.

$\forall n$, $K_{n+1} = f^{n+1}(E) = f^n(f(E))\subset f^n(E)=K_n$.

$K=\bigcap K_n$ est non vide par 1)

Si $x\in K$, soit $n\in\mathbb{N}$. $x\in\bigcap_{j\in\mathbb{N}}K_j$ donc $x\in K_n$, d'où $f(x)\in K_{n+1}$ et $f(x)\in\bigcap_{j\in\mathbb{N}}K_j = K$.

Ceci montre $f(K)\subset K$.

Montrons $K \subset f(K)$.

Soit $x \in K = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E) \supset \bigcap_{n \geq 1} f^n(E)$

Si $x \in K = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E) \supset \bigcap_{n \geq 1} f^n(E)$

Pour tout $n \geq 1$, on choisit $x_n \in \underset{K_{n-1}}{\underset{\shortparallel}{f^{n-1}(E)}}$ t.q. $f(x_n) = x$

$\forall n$, $x_n \in E$ qui est compact, on prend $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str. cr t.q.

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \to \infty} u \in E$

Montrons que $u \in K$. $\forall n$, $x_{\varphi(n)} \in f^{\varphi(n)-1}(E)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\exists n_0$ t.q. $\varphi(n_0) - 1 > k$, d'où pour $n \geq n_0$,

$x_{\varphi(n)} \in f^k(E)$ qui est fermé (car compact)

d'où $u \in f^k(E)$.

Comme $k \in \mathbb{N}$ est arbitraire, $u \in \bigcap_k f^k(E) = K$.

$x = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} f(u)$ d'où $f(u) = x$, cad. $x \in f(K)$.