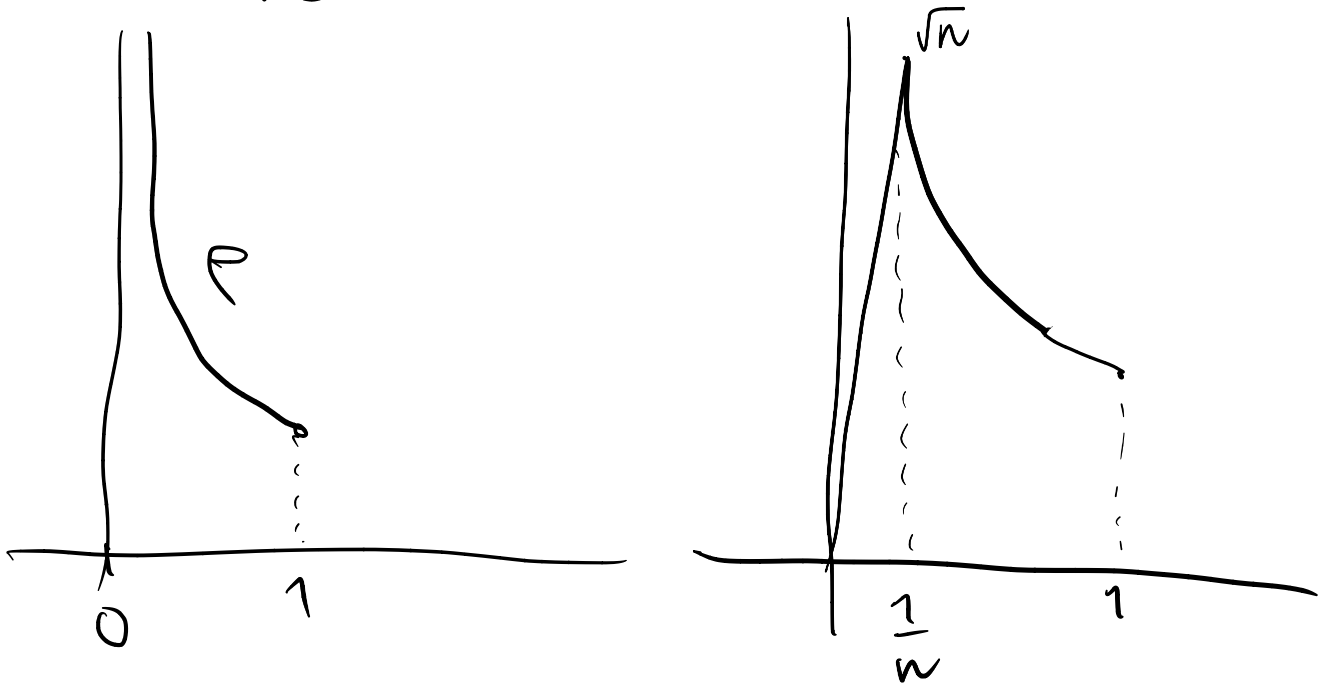
Exo 10.8 $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$, $\rho \in X$

$$f : X \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_0^1 \rho(t)\,u(t)\,dt$$

$$\left|\int_0^1 \rho(t)\,u(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |\rho(t)\,u(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|\rho\|_\infty |u(t)|\,dt$$
$$\leq \|\rho\|_\infty \int_0^1 |u(t)|\,dt = \|\rho\|_\infty \|u\|_1.$$

$\rho(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (pas continue en 0 $\to \rho \notin X$)



rem : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ bien défini en tant qu'intégrale impropre car f est bornée et $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 2$

Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} n\sqrt{n}\,t & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{n}} + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(2 - \frac{3}{2\sqrt{n}}\right)$$

$\|f_n\|_1$ est borné ($\forall n, \|f_n\|_1 \leq 2$)

mais

$$|\phi(f_n)| = \int_0^1 \rho(t)\,f_n(t)\,dt \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

d'où ϕ n'est pas bornée (au sens des applications linéaires), d'où ϕ pas continue.