__Ex 5.4__ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$f, g \in E$

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(|g(k) - f(k)|, 1)$$

1). série cv. par comp avec $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \right)$ (*)

$d(f,g) \geq 0$ clair, et si $d(f,g) = 0$,
$\forall k \; g(k) = f(k)$, càd $f = g$..

$d(f,g) = d(g,f)$ clair
Soient $f, g, h \in E$
$\forall k \quad |f(k) - h(k)| \leq |f(k) - g(k)| + |g(k) - h(k))$

$\min(|f(k) - h(k)|, 1) \underset{?}{\leq} \min(|f(k) - g(k)|, 1) + \min(|g(k) - h(k)|, 1)$?

si $|f(k) - g(k)| \geq 1$ ou $|g(k) - h(k)| \geq 1$, c'est clair
→ on peut supposer $|f(k) - g(k)| < 1$, $|g(k) - h(k)| < 1$
alors $\min(|f(k) - g(k)|, 1) \leq |f(k) - h(k)|$
$\leq |f(k) - g(k)| + |g(k) - h(k)|$
$= \min(|f(k) - g(k)|, 1) + \min(|g(k) - h(k)|, 1)$

comp terme à terme ⇝
$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

Borné clair $d(f,0) \leq 2$ cf (*)

2) $$\sum_{k=0}^{K} \frac{\min(|g(k) - f(k)|, 1)}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\min(|g(k) - f(k)|, 1)}{2^k}$$

$$\leq 2^{-K} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{K+1}} \cdot 2$$

$$= 2^{-K} \frac{2 - 2^{-K}}{2 - 1} + 2^{-K} \leq 3 \cdot 2^{-K}.$$

si $d(f,g) \leq 2^{-2K}$, alors $\forall k \in \{0, \dots, K\}$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$?

$\sum_{k=0}^{K} \frac{2^{-K}}{2^k} = 2^{-K}(2 - 2^{-K}) = 2^{-2K}(2^{K-1} - 1) \underset{\text{si } K > 1}{>} 2^{-2K}$

ok pour $K = 0$ (toujours vrai)
$K = 1$?
$\frac{1}{2} \min(|f(1) - g(1)|, 1) \leq \frac{1}{4}$ → OK
$\min \leq \frac{1}{2} = 2^{-K}$

3) Supp. $d(f, f_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$.

on prend $K > k$ t.q. $2^{-K} < \varepsilon$.

et N t.q $\forall n \geq N$, $d(f, f_n) < 2^{-2K}$.

par (2) appliqué à f, f_N $n \geq N \Rightarrow |f(k) - f_n(k)| \leq 2^{-K} < \varepsilon$.

Supp. $\forall k$, $|f(k) - f_n(k)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et K t.q. $3 \cdot 2^{-K} < \varepsilon$.

on choisit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow$
$\max(|f(0) - f_n(0)|, \dots, |f(K) - f_n(K)|) < 2^{-K}$

alors par (2) $\forall n \geq N$,
$d(f, f_n) \leq 3 \cdot 2^{-K} < \varepsilon$.

4) Comme en (3) utilisant f_n, f_m au lieu de f, f_n $(f_n)_n$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Si (f_n) de Cauchy, chaque $(f_n(k))_n$ cv. ($\mathbb{R}$ complet).

on définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $\forall k$ $f(k) = \lim_{n\to\infty} f_n(k)$

alors $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ coup par coup donc pour d (3).