Exo 30

1) • transitivité $a < b$ et $b < c$

$\forall k < m,\ a_k = b_k$ et $a_m < b_m$ $\qquad$ $\forall \ell < n,\ b_\ell = c_\ell$ et $b_n < c_n$

si $m < n$, $\forall k < m$ $\quad a_k = b_k = c_k$
$a_m < b_m = c_m$ d'où $a < c$

si $m > n$, $\forall \ell < n$, $a_\ell = b_\ell = c_\ell$
$a_n = b_n < c_n$ d'où $a < c$

si $m = n$, $\forall k < m$, $a_k = b_k = c_k$
et $a_m < b_m < c_m$ d'où $a < c$

• réflexive par construction

• antisymétrie
si $a \neq b$, soit m le premier entier t.q. $a_m \neq b_m$. alors $a < b$ (si $a_m < b_m$) ou $b < a$ (si $b_m \leq a_m$).
(mais pas les deux).

2) $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{B^n}\right)$ $\qquad$ $\left|\frac{a_n}{B^n}\right| \leqslant \frac{B-1}{B^n}$ $\quad (*)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B-1}{B^n} = \frac{B-1}{B} \frac{1}{1-\frac{1}{B}} = 1$$

par comparaison, $\left(\sum \frac{a_n}{B^n}\right)$ cv. absolument.

$S(a) \geqslant 0$ clair

$S(a) \leqslant 1$ par comparaison $(*)$

3) si $a < b$, disons $a_k = b_k$ pour $k < m$ et $a_m < b_m$,

$$S(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{a_m}{B^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_m}{B^m}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{a_m}{B^m} + \frac{1}{B^m}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{b_m}{B^m} \overset{(*)}{\leqslant} S(b)$$

car $S(b) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{b_m}{B^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_m}{B^m}$

$a = (0, B-1, B-1, \ldots)$ (suite c partir du rang 2) $\quad a < b$

$b = (1, 0, 0, \ldots)$

$S(a) = S(b)$ car $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{B-1}{B^m} = \frac{B-1}{B^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{B}} = \frac{1}{B}$.

$\rightsquigarrow$ pas str. croissante.

4) si $a \in F$,

$$S(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{a_m}{B^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_m}{B^m}$$

$$\nearrow < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{B^k} + \frac{a_m}{B^m} + \frac{1}{B^m} \quad (\leq S(b) \text{ par ce qui précède})$$

En effet, soit $n > m$ t.q. $a_n < B-1$.

$$\frac{1}{B^m} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_m}{B^m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{B-1-a_m}{B^m} \geq \frac{B-1-a_n}{B^n} > 0.$$

5) $a_n = [B^n x] - B[B^{n-1}x] \in \{0, \ldots, B-1\}$?

$$B^n x - 1 < [B^n x] \leq B^n x < [B^n x] + 1$$

$$B^n x - B < B[B^{n-1}x] \leq B^n x < B[B^{n-1}x] + B$$

$$a_n < B^n x - (B^n x - B) = B$$

$\rightsquigarrow a_n \leq B-1$.

$$a_n > B^n x - 1 + B^n x = -1$$

d'où $a_n \geq 0$.

$\to a \in E$.

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^n}$$

$a \in F$?
$S(a) = x$?

$$\frac{a_n}{B^n} = \frac{[B^n x]}{B^n} - \frac{[B^{n-1} x]}{B^{n-1}} \qquad \left(a_n = [B^n x] - B[B^{n-1} x] \right)$$

$$\frac{a_{n-1}}{B^{n-1}} = \frac{[B^{n-1} x]}{B^{n-1}} - \frac{[B^{n-2} x]}{B^{n-2}}$$

$\vdots$

(récurrence $\to$)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{B^n} = \frac{[B^N x]}{B^N}}$$

$$\frac{[B^N x]}{B^N} \leq x \overset{(*)}{<} \frac{[B^N x] + 1}{B^N}$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^N} = x$.

$\to S(a) = x$

si $a_k = B-1$ pour tout $k \geq N+1$,

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{B^n} + \frac{B-1}{B^{N+1}} \frac{B}{B-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{B^n} + \frac{1}{B^N}$$

$$= \frac{[B^N x]}{B^N} + \frac{1}{B^N}$$

contredit (*).

$\to a \in F$

6) $S|_F$ strictement croissante $\rightsquigarrow$ injective, et on a montré la surjectivité de $S|_F$ en (5).

7) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de pts de $[0,1[$, $x \in [0,1[$.

$$S(a_{(n)}) = x_n$$

$$S(a) = x$$

on suppose $\forall k \geq 1$, $a_{n,k} \xrightarrow{n \to \infty} a_k$ (donc cst à partir d'un certain rang ! N_0)

$$x_n - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k} - a_k}{B^k}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit K t.q.

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{B-1}{B^k} < \varepsilon.$$

On prend N t.q. $\forall n \geq N$,

$$a_{n,0} = a_0$$
$$a_{n,1} = a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n,K} = a_K$$

alors $\forall n \geq N$,

$$|x_n - x| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{a_{n,k} - a_k}{B^k} \right|$$
$$\leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{B-1}{B^k} < \varepsilon.$$

réciproque est fausse,

$x = \frac{1}{B}$ $\quad$ $a = (1, 0, 0, \ldots)$

$x_n = \sum_{l=2}^{n} \frac{B-1}{B^l}$ $\quad$ $a_n = (0, B-1, B-1, \ldots, B-1, 0, 0, \ldots)$

pour aucun k, $a_{n,k} \xrightarrow{n \to \infty} a_k$.

Exo 31

1)

$$\begin{array}{l|l} 13 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{7} & 1,\underbrace{857142}\underbrace{857142}\ldots \\ \;60 & \\ \;\underline{56} & \\ \;\;40 & \\ \;\;\underline{35} & \\ \;\;\;50 & \\ \;\;\;\underline{49} & \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\underline{7} & \\ \;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\underline{28} & \\ \;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{14} & \\ \;\;\;\;\;\;\;60 & \end{array}$$

2) $x = 0.4545\ldots$

$100x = 45.45\ldots$

$99x = 45$

$x = \frac{45}{99} \left(= \frac{5}{11}\right)$

$y = 0.5656\ldots$

$y = \frac{56}{99}$

$x + y = \frac{45+56}{99} = \frac{101}{99}$

$= 1.0202\ldots$

$$\begin{array}{l|l} 101 & 99 \\ \cline{2-2} \underline{99} & 1.020202\ldots \\ \;\;200 & \\ \;\;\underline{198} & \\ \;\;\;\;2 & \end{array}$$