Université Grenoble Alpes | **Année 2023-2024**
Licence de sciences, 2e année | **MAT 303**

Premier contrôle continu

Mardi 3 octobre 2023

Durée : 1 h.
Documents, téléphones portables, objets connectés interdits.
La rédaction et la précision des arguments sont des critères importants d'évaluation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (8 points)
Soit $S \subset \mathbb{R}$ une partie non vide bornée.

1) Donner une définition de $\inf(S)$ et $\sup(S)$, $\min(S)$, $\max(S)$..
2) Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui admet un infimum mais pas de minimum.
3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que $\inf(S) \in]a, b[$, montrer que $S \cap]a, b[\neq \emptyset$.
4) On suppose qu'il existe $c > \inf(S)$ tel que $S \cap]\inf(S), c[= \emptyset$. L'ensemble S admet-il un minimum ?
5) On note $-S = \{-a \mid a \in S\}$. Montrer

$$\inf(-S) = -\sup(S), \quad \sup(-S) = -\inf(S).$$

Exercice 2. (3 points)
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $a \in \mathbb{R}$.

1) Rappeler la définition de « f est continue en a ».
2) Montrer que si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.

Exercice 3. (3 points)
Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, déterminer, si elles existent, les limites inférieures et supérieures.

1) $u_n = \frac{3n^2+(-1)^n}{2n-1}$;
2) $u_n = \cos(n\pi/2023)$;
3) $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 4. (6 points)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques bornées.

1) Montrer que $(u_n + v_n)$ est bornée, et

$$(*) \qquad \limsup(u_n + v_n) \leqslant \limsup(u_n) + \limsup(v_n).$$

2) Montrer qu'il n'y a pas égalité en général dans $(*)$.
3) Montrer que, si la suite v_n est convergente, on a

$$\limsup(u_n + v_n) = \limsup(u_n) + \lim(v_n).$$

4) Déterminer les limites inférieures et supérieures de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$x_n = \cos(\frac{n\pi}{2023}) + \frac{\sin n}{n}.$$