Corrigé CC3 MAT 402 (14 avril 2025)

Exo 2

1) pour $|x|<1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (série géométrique, qui est de rayon de cv 1)

sur $]-1,1[$, on peut dériver la série terme à terme

d'où $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left((1-x)^{-1}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(série dérivée a le même rayon de convergence que la série initiale)

ceci donne $\forall x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

pour $|x|>1$, la série diverge grossièrement donc le rayon de cv. vaut 1.

2) C'est la série dérivée de celle de la question précédente, donc elle est de rayon de cv 1 et $\forall x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{(1-x)(1-x+2x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Exo 3

1) $$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k\cdot\frac{k-1}{2}} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \dfrac{2}{k(k-1)} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

(noter que $k=2n+1 \iff n = \frac{k-1}{2}$)

2) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on note $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

alors $$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+1)} |x|^2 \xrightarrow{n\to\infty} |x|^2$$

Par le critère de d'Alembert (version séries numériques) :

si $|x|^2<1$ ($\iff |x|<1$), $(\sum b_n)$ cv., donc $R\geq 1$

si $|x|^2>1$ ($\iff |x|>1$), $(\sum b_n)$ diverge grossièrement donc $R\leq 1$, càd $\boxed{R=1}$.

3) Pour $|x| \leq 1$, $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2n^2+n}$

d'où $\sup \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2n^2+n}$

et $\left(\sum \frac{1}{2n^2+n} \right)$ cv. car $\frac{1}{2n^2+n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

et $\left(\sum \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ cv.

(série de Riemann de paramètre $2 > 1$)

Ceci donne (par comparaison de séries à termes >0) que $\left(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \right)$ CVN sur $[-1,1]$

CVN $\Rightarrow$ CVU, et chaque terme de la série est continu sur $[-1,1]$, d'où $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots$

$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$

est continue.

4) par le théorème de dérivation des séries entières, f est dérivable sur $]-1,1[$ et on peut dériver la série de l'énoncé terme à terme.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}$$

d'où $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}$ (et cette série est toujours de rayon de cv. 1)

5) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n}$$

Pour $|u| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$, d'où $\ln(1-u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k}$$

ceci donne pour $|-x^2| < 1$ ($\Leftrightarrow |x| < 1$)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n} = \ln(1+x^2)$$

donc $f'(x) = \ln(1+x^2)$

6) $\int \ln(1+x^2)\,dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(1+x^2)}_{u}\,dx$

$u = \ln(1+x^2) \qquad u' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$v' = 1 \qquad v = x$

$$= x\ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{atan} x) + C$$

Soit $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in]-1,1[$,

$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{atan} x + C$

Comme $f(0) = a_0 = 0$, $C = 0$ càd.

$\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \underbrace{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{atan} x}_{\text{ceci définit une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

par continuité de f sur $[-1,1]$,
l'expression reste valable
pour tout $x \in [-1,1]$.