Une correction du CC3 du 4 décembre 2024

Exercice 2

(1) (a) $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f(t)^2 \mathrm{d}t}$.

(b) $\varphi(f)$ est bien définie car f est continue sur les segments $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Par définition, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire: on vérifie que pour tout $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(f + \lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$.
De plus, φ est continue. En effet, si $f \in E$,

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &\leq \Big|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\Big| + \Big|\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{-1}^0 |f(t)|\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 |f(t)|\mathrm{d}t = \langle |f|, 1\rangle\end{aligned}$$

où, par abus de notation, on note 1 la fonction constante égale à 1. On note $g := |f|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle g, 1\rangle \leq ||g|| \times ||1||$$

or $||g|| = ||f||$ et $||1|| = \sqrt{\int_{-1}^1 1\mathrm{d}t} = \sqrt{2}$. On a donc obtenu que pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leq \sqrt{2}||f||$. Ainsi, φ est bornée sur la boule unité fermée, d'où la continuité de φ (exercice 1 question 3).
On a obtenu que pour tout $f \in E$ non nulle, on a $\frac{|\varphi(f)|}{||f||} \leq \sqrt{2}$. Ainsi, $|||\varphi||| = \sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}} \left(\frac{|\varphi(f)|}{||f||}\right) \leq \sqrt{2}$.

(c) On trouve $\varphi(g_n) = 2 - \frac{1}{n}$ et $||g_n|| = \sqrt{2 - \frac{4}{3n}}$.

(d) Par définition de $|||\varphi|||$, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|||\varphi||| \geq \frac{|\varphi(g_n)|}{||g_n||} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{4}{3n}}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $|||\varphi||| \geq \sqrt{2}$.
Avec la question 1b, on a donc $|||\varphi||| = \sqrt{2}$.

(2) (a) F est fermé dans E car c'est l'image réciproque par l'application continue φ de $\{0\}$, fermé de $\mathbb{R}$.

(b) Soit $g \in E \setminus F$, c'est-à-dire $g \in E$ telle que $\varphi(g) \neq 0$. On peut choisir par exemple la fonction g_0 qui est nulle sur $[-1, 0]$ et telle que $g_0(t) = 2t$ si $t \in [0, 1]$ car $\varphi(g_0) = 1 \neq 0$. Notons $G := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(g) = \{\alpha g \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $E = F \oplus G$.
On a $F \cap G = \{0\}$ car $0 \in F \cap G$ et si $f \in F \cap G$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha g$. Puisque $\varphi(f) = 0$, cela donne par linéarité $\alpha \underbrace{\varphi(g)}_{\neq 0} = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $f = 0$.

Montrons que $E = F + G$. Soit $h \in E$, alors $h = (h - \alpha_h g) + \alpha_h g$ avec $\alpha_h := \frac{\varphi(h)}{\varphi(g)}$. Par construction, $\alpha_h g \in G$ et on a bien $h - \alpha_h g \in F$ car $\varphi(h - \alpha_h g) = \varphi(h) - \alpha_h \varphi(g) = 0$ par définition de α_h.

(3) (a) Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in E$ telle que pour tout $f \in E$, on a $\varphi(f) = \langle a, f \rangle$. En particulier, pour tout $f \in E$ nulle sur $[-1, 0]$, on a $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 a(t)f(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 (a(t) - 1)f(t)\mathrm{d}t = 0\,. \tag{1}$$

En choisissant en particulier la fonction f nulle sur $[-1, 0]$ et telle que $f(t) = t(a(t) - 1)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (qui est bien dans E) on a d'après (1),

$$\int_0^1 t(a(t) - 1)^2\mathrm{d}t = 0\,.$$

Puisque $t \mapsto t(a(t) - 1)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$. Ainsi, $a(t) = 1$ pour tout $t \in]0, 1]$ (on ne peut pas directement conclure pour $t = 0$, mais par continuité de a sur $[0, 1]$ on a nécessairement $a(0) = 1$). De même, on montre que $a(t) = -1$ pour tout $t \in [-1, 0[$. La fonction a n'est donc pas dans E car elle n'est pas continue en 0, ce qui est une contradiction.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser les fonctions continues et affines par morceaux suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f_\varepsilon : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ \frac{a(\varepsilon)-1}{\varepsilon}t & \text{si } t \in [0, \varepsilon] \\ a(t) - 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Le point délicat est de montrer que $I_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ où $I_\varepsilon := \frac{a(\varepsilon)-1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (a(t) - 1)t\mathrm{d}t$. Montrons-le. Puisque $t \mapsto a(t) - 1$ est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée, disons par $M \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $|I_\varepsilon| \leq \frac{M}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon Mt\mathrm{d}t = M^2\varepsilon/2 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.

(b) On en déduit que E n'est pas complet car d'après le théorème de représentation de Riesz, dans un espace préhilbertien complet (Hilbert), une forme linéaire continue s'écrit toujours sous la forme donnée par la question précédente, ce qui n'est pas le cas ici.

(4) Soit $f \in E$. D'après la question 2b, on peut écrire $f = h + \lambda g_0$ avec $h \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et g_0 la fonction introduite ci-dessus (question 2b). On a donc $\varphi(f) = \lambda\varphi(g_0) = \lambda$ et

$$\langle f, g \rangle = \underbrace{\langle h, g \rangle}_{=0 \text{ car } g \in F^\perp} + \lambda\langle g_0, g \rangle = \lambda\langle g_0, g \rangle\,.$$

De plus, $\langle g_0, g \rangle \neq 0$ car sinon pour tout $f \in E$, $\langle f, g \rangle = 0$ d'après l'égalité ci-dessus. En particulier, on aurait $\langle g, g \rangle = 0$ c'est-à-dire $||g||^2 = 0$, ce qui est impossible car

g est non nulle. On a donc obtenu

$$\varphi(f) = \lambda = \frac{1}{\langle g_0, g\rangle} \langle f, g\rangle \,,$$

d'où le résultat avec $\alpha := \frac{1}{\langle g_0, g\rangle}$.

(5) D'après la question précédente, on a donc que pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \langle \alpha g, f\rangle$ avec $\alpha g \in E$, cela contredit le résultat de la question 3a, il n'existe donc pas de fonction $g \in F^{\perp}$ qui est non nulle.

Exercice 3

(1) (a) Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Puisqu'une suite de Cauchy est bornée, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \overline{B}(0, r)$. Par hypothèse, $\overline{B}(0, r)$ est compact or, d'après le cours, cela implique qu'il est complet. Ainsi, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet $\overline{B}(0, r)$ donc elle converge d'où la complétude de X.

(b) Puisque A est borné, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset \overline{B}(0, r)$, qui est compacte par hypothèse. Ainsi, A est un ensemble fermé dans le compact $\overline{B}(0, r)$ donc A est compact d'après le cours.

(2) (a) Voir le cours.

(b) Toutes les boules fermées ne sont pas compactes. Soit $B := \overline{B}(0, 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de fonctions continues $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux qui est nulle en dehors de l'intervalle $I_n := \left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right[$, qui vaut 1 au centre de cet intervalle et qui est une fonction triangle sur I_n. Les intervalles I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et $f_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, pour tout $m \neq n$, $||f_n - f_m||_\infty = 1$ donc on ne peut pas extraire une sous-suite de $(f_n)_n$ qui est convergente.