L3 Mathématiques avec approfondissements — Université Grenoble Alpes
Topologie — 2024-2025

Contrôle du 04/12/2024

Durée : 1h30. Le sujet comporte **2 pages**. *Documents, objets connectés (téléphones, montres, etc) interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Toute réponse doit être soigneusement justifiée (nous tiendrons compte de la présentation et de la rédaction).*

Exercice 1. (environ 4 points)

1. Soit X un ensemble. Donner la définition d'une topologie sur X.
2. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Rappeler la définition de la projection $\pi_C(v)$ d'un point $v \in H$ sur C, et démontrer que pour tout $u \in C$, $\langle u - \pi_C(v), v - \pi_C(v) \rangle \leq 0$.
3. Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est continue si et seulement si f est bornée sur la boule unité fermée.

Exercice 2. (environ 10 points) Soit E l'espace des fonctions continues $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire suivant :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t\,.$$

On note $||\cdot||$ la norme associée à ce produit scalaire. L'espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est préhilbertien. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t$$

1. (a) Soit $f \in E$. Donner une formule pour $||f||$.
   (b) Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E et que $|||\varphi||| \leq \sqrt{2}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(g_n)$ et $||g_n||$ lorsque g_n est la fonction

$$g_n : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq -1/n \\ nt & \text{si } t \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   (d) Que vaut $|||\varphi|||$? (À justifier.)
2. Soit F l'espace vectoriel $\ker(\varphi)$, c'est-à-dire $F := \{f \in E \ :\ \varphi(f) = 0\}$.
   (a) Rappeler pourquoi F est fermé dans E.
   (b) Donner un sous-espace G de E de dimension 1 tel que $E = F \oplus G$.
3. (a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $a \in E$ telle que pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \langle a, f \rangle$. *Indication : Si une telle fonction a existe, montrer que $a(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ à l'aide de fonctions f nulles sur $[-1, 0]$. Puis déterminer la valeur de a sur $[-1, 0]$.*
   (b) Que peut-on en déduire sur E ?
4. (a) Supposons qu'il existe $g \in F^{\perp}$ non nul. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in E$, on a $\varphi(f) = \alpha\langle g, f \rangle$.
   (b) En déduire que $F^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 3. (environ 6 points)
Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leq r\}$$

la boule fermée de centre x et de rayon r.

1. On suppose dans cette question que pour tout $x \in X$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\overline{B}(x,r)$ est compacte.
   (a) Montrer que X est complet.
   (b) Montrer que si $A \subset X$ est un ensemble fermé et borné alors il est compact.
2. Supposons que X est l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et que d est la distance associée à la norme $||\cdot||_\infty$ où l'on rappelle que

$$\forall f \in X,\ ||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|\,.$$

   (a) Montrer que (X, d) est complet.
   (b) Est-ce que toutes les boules fermées sont compactes ?