MAT 402 — Groupe MAT 2

Interro 2 (14 avril 2025)

Durée : 1 h.
Documents, calculatrices, objets connectés interdits.
Barème indicatif : 4/4/12

Exercice 1. (**Question de cours**)

1. Rappeler la définition du rayon de convergence R d'une série entière $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$.
2. Démontrer que si $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$ est de rayon de convergence R, alors pour tout $r < R$, la série converge normalement sur $[-r, r]$.

Exercice 2. Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer son rayon de convergence R, et **calculer sa somme** sur $]-R, R[$:

1. $\left(\sum_{n\geq 1} n x^n\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}\right)$

Exercice 3. On considère la série

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}\right).$$

1. Montrer que cette série peut s'écrire sous la forme $(\sum_k a_k x^k)$, et expliciter la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
3. Montrer que la série converge sur $[-R, R]$, et que sa somme, que l'on notera f, est continue sur $[-R, R]$.
4. Montrer que f est dérivable sur $]-R, R[$, et exprimer sa dérivée sur $]-R, R[$ comme somme d'une série entière.
5. Exprimer $f'(x)$ en termes de fonctions usuelles, pour $x \in]-R, R[$.
6. En déduire une expression pour f en termes de fonctions usuelles sur $]-R, R[$. Cette expression est-elle valable en $x = R$? en $x = -R$?