**Contrôle du 06/11/2024**

*Durée : 3 heures. Le sujet comporte* **2 pages**. *Documents, objets connectés (téléphones, montres, etc) interdits. Le barème sur 30 points (plus 3 points bonus) est donné à titre indicatif. Toute réponse doit être soigneusement justifiée (nous tiendrons compte de la présentation et de la rédaction).*

**Exercice 1.** (environ 6 points) Autour du cours.

1. Soit $(E, d)$ un espace métrique.
   (a) Donner la définition d'un voisinage d'un point $x \in E$, et montrer que $U \subset E$ est ouvert si et seulement si pour tout $u \in U$, $U$ est un voisinage de $u$.
   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$. Donner la définition de la convergence de la suite $(x_n)$ vers un $a \in E$.
   (c) Montrer que $(x_n)$ converge vers $a$ si et seulement si pour tout ouvert $U \subset E$ contenant $a$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in U$.
   (d) Rappeler la définition d'une suite de Cauchy dans $(E, d)$, et donner la définition d'un espace métrique complet.
2. Soit $E$ un espace vectoriel réel, et $||\cdot||$ une norme sur $E$.
   (a) Rappeler la définition de la distance $d$ associée à cette norme, et montrer que $d$ est une distance.
   (b) Rappeler la définition d'un convexe de $E$, et montrer que la boule unité est convexe. *On rappelle que la boule unité est* $B(0, 1) = \{v \in E : ||v|| < 1\}$.

**Exercice 2.** (environ 9 points) Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que $N_2$ est une norme sur $E$.
2. On admet que $N_1$ est aussi une norme sur $E$.
   (a) Montrer que si $N_1$ provient d'un produit scalaire alors elle vérifie l'identité du parallélogramme :
   $$\forall (f, g) \in E^2,\ \ N_1(f + g)^2 + N_1(f - g)^2 = 2N_1(f)^2 + 2N_1(g)^2\,.$$
   (b) Est-ce que la norme $N_1$ provient d'un produit scalaire ?
3. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on note $b(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $b$ est un produit scalaire.
   (b) Soit $f$ une fonction constante non nulle. Donner l'ensemble des fonctions qui sont orthogonales à $f$.
   (c) Donner la norme $N_3$ qui est associée à $b$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n \in E$ telle que $f_n(t) = t^n$ pour tout $t \in [0, 1]$.
   (a) Est-ce que la suite $(f_n)_n$ converge dans $(E, N_1)$ ?
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas dans $(E, N_2)$. *Indication :* Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pourra utiliser, en le justifiant, que pour tout $x \in [0, 1]$,
   $$\left|\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t\,.$$
5. Les normes $N_1$, $N_2$ et $N_3$ définissent-elles la même topologie sur $E$ ?

**Exercice 3.** (environ 6 points) On considère l'ensemble $C$ des applications croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C$, et soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i)$.
   (a) Montrer que $g \in C$.
   (b) Montrer que $g \neq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $C$.
3. (a) Etablir une bijection explicite entre $C$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire que $C$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (on pourra admettre le théorème de Cantor-Bernstein, et le fait que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathbb{R}$).

**Exercice 4.** (environ 12 points) Dans tout cet exercice, on note $E$ un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ une application telle que

(i) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$ ;
(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ ;
(iii) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$.

Pour tout $(x,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$, c'est-à-dire

$$B(x,r) = \{y \in E \,:\, d(x,y) < r\}\,.$$

**PARTIE 1. Quelques propriétés.**

1. (a) Montrer que $d$ est une distance. *On dit que $d$ est une distance ultramétrique sur $E$.*
   (b) Soient $(x,y,z) \in E^3$. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$ alors $(iii)$ est une égalité.
2. Soient $B_1 := B(x,r)$ et $B_2 := B(y,r')$ avec $x, y \in E$ et $0 < r \leq r'$. Supposons que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.
   (a) Montrer que $B_1 \subset B_2$.
   (b) En déduire que si $r = r'$ alors $B_1 = B_2$.
3. Montrer que toute boule ouverte est fermée.
4. Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(x,r) = \{y \in E \,:\, d(x,y) \leq r\}$ est ouverte.

**PARTIE 2. Étude d'un exemple.**

Soient $X$ un ensemble qui contient au moins deux éléments, et $E = X^{\mathbb{N}^*}$ (ensemble des suites d'éléments de $X$, les indices commençant à 1). Soient $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$, on note

$$f(x,y) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, x_n \neq y_n\} & \text{si } x \neq y \\ +\infty & \text{si } x = y\,. \end{cases}$$

On utilisera la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on note $d(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$. Montrer que $d$ est une distance ultramétrique sur $E$.
2. Que vaut $\sup\{d(x,y) \,:\, x, y \in E\}$ ?
3. Soient $x \in E$ et $r > 0$. Décrire les éléments de $B(x,r)$.
4. L'espace métrique $(E,d)$ est-il complet ?

**PARTIE 3. Une question ouverte.**

Soit $(E,d)$ un espace métrique où $d$ est une distance ultramétrique. Est-ce que tout fermé est un ouvert ?