Une correction du CC2 du 6 novembre 2024

Exercice 2

(1) N_2 est bien définie ($|f'|$ est continue sur le segment $[0,1]$). Pour tout $f \in E$, comme $|f(0)| \geq 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|dt \geq 0$, on a $N_2(f) \geq 0$. De plus, si $N_2(f) = 0$, puisque c'est la somme de deux termes positifs, ils sont nuls : $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|dt = 0$. De plus, si g est une fonction positive et continue sur $I := [0,1]$ telle que $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ alors g est nulle sur I. Ici, $|f'|$ vérifie ces hypothèses donc f' est nulle sur I. Ainsi, f est constante sur I et puisqu'elle s'annule en $0 \in I$, f est nulle. Pour tout $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de la dérivée et de l'intégrale

$$\begin{aligned} N_2(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \int_0^1 |(\lambda f)'(t)|dt = |\lambda|\ |f(0)| + \int_0^1 |\lambda|\ |f'(t)|dt \\ &= |\lambda|\ |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)|dt = |\lambda| N_2(f). \end{aligned}$$

Pour tous $f, g \in E$ et tout $t \in [0,1]$, $|(f+g)'(t)| = |f'(t) + g'(t)| \leq |f'(t)| + |g'(t)|$, donc

$$\begin{aligned} N_2(f+g) &= |(f+g)(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)|dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 \left(|f'(t)| + |g'(t)|\right) dt \\ &= |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt + \int_0^1 |g'(t)|dt = N_2(f) + N_2(g). \end{aligned}$$

(2) (a) Supposons que pour tout $f \in E$, $N_1(f,f)^2 = \langle f, f \rangle$ pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} N_1(f+g)^2 &= \langle f+g, f+g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ N_1(f-g)^2 &= \langle f-g, f-g \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle. \end{aligned}$$

et le résultat vient en additionnant les deux membres de ces égalités.

(b) Soient $f, g \in E$ définies pour $t \in [0,1]$ par $f(t) = t$, $g(t) = 1-t$.

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \textstyle\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ N_1(g) &= \textstyle\int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2} \\ N_1(f+g) &= \textstyle\int_0^1 1 dt = 1 \\ N_1(f-g) &= \textstyle\int_0^1 |2t-1|dt = \int_0^{1/2} (1-2t)dt + \int_{1/2}^1 (1-2t)df = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$2N_1(f)^2 + 2N_1(g)^2 = 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = 1 \neq \frac{5}{4} = 1^2 + \frac{1}{4} = N_1(f+g)^2 + N_2(f-g)^2,$$

donc l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite, et N_1 ne provient pas d'un produit scalaire.

(3) (a) b est bien définie (intégrale de fonctions continues sur $[0,1]$) et b est clairement symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Elle est linéaire par rapport

à sa première variable car pour tous $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b(\lambda f+g,h) &= (\lambda f+g)(0)h(0)+\int_0^1(\lambda f+g)'(t)h'(t)dt \\ &= \lambda f(0)h(0)+g(0)h(0)+\int_0^1(\lambda f'(t)+g'(t))h'(t)dt \\ &= \lambda f(0)h(0)+g(0)h(0)+\int_0^1(\lambda f'(t)h'(t)+g'(t)h'(t))dt \\ &= \lambda f(0)h(0)+\lambda\int_0^1 f'(t)h'(t)dt+g(0)h(0)+\int_0^1 g'(t)h'(t)dt \\ &= \lambda b(f,h)+b(g,h). \end{aligned}$$

Ainsi, b est bilinéaire. Il reste à montrer qu'elle est définie positive. Si $f \in E$, $f(0)^2 \geq 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$ donc $b(f,f) \geq 0$. Si $b(f,f) = 0$, alors $f(0) = 0$, et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. Mais $(f')^2$ est une fonction positive continue, donc $(f')^2 = f' = 0$ sur $[0,1]$, ce qui donne f constante. Comme $f(0) = 0$, on a $f = 0$.

(b) Si $f \in E$ est constante, $f' = 0$, donc pour $g \in E$, $b(f,g) = f(0)g(0)$. Ainsi,

$$b(f,g)=0 \iff f(0)g(0)=0 \iff g(0)=0$$

où la dernière équivalence vient du fait que $f(0) \neq 0$ (car f est constante non nulle). On a donc $f^\perp = \{g \in E : g(0) = 0\}$.

(c) Pour tout $f \in E$, $N_3(f) = \sqrt{b(f,f)} = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$.

(4) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(f_n - 0) = N_1(f_n) = \int_0^1 |t^n| dt = \frac{1}{n+1}$, donc $N_1(f_n - 0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle.

(b) Soit g comme dans l'indication ; on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left|\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |g(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^x |g(t)|\mathrm{d}t + \int_x^1 |g(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t,$$

car $|g|$ est positive. Montrons par l'absurde que $(f_n)_n$ ne converge pas pour N_2. Soit $h \in E$ telle que $N_2(f_n - h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $N_2(f_n - h) = |h(0)| + \int_0^1 |f_n'(t) - h'(t)| dt \geq |h(0)| \geq 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc $h(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$N_2(f_n-h) = \int_0^1 |f_n'(t)-h'(t)|dt \geq \left|\int_0^x (f_n'(t)-h'(t))dt\right| = |x^n - h(x)|\,.$$

Noter que $x^n \to 0$ si $x < 1$, et $x^n \to 1$ si $x = 1$. Comme $|x^n - h(x)| \geq 0$, la condition $N_2(f_n - h) \to 0$ implique que $h(x) = 0$ si $x < 1$ et $h(1) = 1$, mais alors h n'est pas continue en 1, donc pas dans E, contradiction.

(5) N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes par les réponses aux questions 4(a) et 4(b), puisque (f_n) converge pour N_1 mais pas pour N_2.

Pour N_3, on calcule pour tout $n > 1$, $N_3(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-2}}$, donc elle ne peut pas converger vers la fonction nulle pour N_3, donc par 4(a) N_1 et N_3 ne définissent pas la même topologie.

Pour comparer N_2 et N_3, on considère pour $n > 1$ la suite $g_n = f_n/\sqrt{n}$. On a $N_2(g_n - 0) = N_2(g_n) = N_2(f_n)/\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} \to 0$ donc g_n converge vers la fonction nulle pour N_2. En revanche quand n tend vers ∞, $N_3(g_n) = \frac{n}{\sqrt{2(n^2-n)}} \to \sqrt{2}$, donc N_3 ne tend pas vers 0 pour N_3. Donc N_2 et N_3 ne définissent pas la même topologie.

Exercice 3

(1) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(n+1) - g(n) = f_{n+1}(n+1) \geq 0$, donc g est croissante. De plus, g est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (somme d'entiers naturels) donc $g \in C$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(n) = (1 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(i)) + f_n(n) > f_n(n)$, donc $g \neq f_n$.

(2) Supposons par l'absurde qu'il existe une bijection $\alpha : \mathbb{N} \to C$. On construit une suite (f_n) d'éléments de C définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \alpha(n)$. Soit g définie à partir de cette suite comme en question (1). On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \neq f_n$, c'est-à-dire $g \notin \mathrm{Im}(\alpha)$, ce qui contredit la surjectivité de α.

(3) (a) On définit $\psi : C \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pour tout $f \in C$ de la façon suivante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\psi(f)(k) = \begin{cases} f(0) \text{ si } k = 0, \\ f(k) - f(k-1) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme $f \in C$, pour tout k on a $\psi(f)(k) \in \mathbb{N}$. Pour montrer que c'est une bijection, construisons sa réciproque. Soit $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to C$ définie pour tout $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\phi(g)(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i).$$

Clairement $\phi(g) \in C$, puisque

$$\phi(g)(k+1) = \phi(g)(k) + g(k+1) \geq \phi(g)(k).$$

Cette formule montre aussi que pour tout $g \in C$, $\psi(\phi(g)) = g$, et on vérifie aussi que pour tout $f \in \mathbb{N}^N$, $\phi(\psi(f)) = f$, donc ϕ et ψ sont bijectives.

(b) L'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ donne l'inclusion $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc une injection $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, en composant avec une bijection entre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$. Pour construire une injection dans l'autre sens, on peut utiliser $\beta \circ \alpha$, où $\alpha : \mathbb{R} \to]0,1[$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\alpha(x) = 1/(1+e^x)$, et $\beta :]0,1[\to \mathbb{N}^N$ associe à $y \in]0,1[$ les chiffres de sont développement décimal propre en base 10.

Par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et on a vu dans la question 3(a) que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à C.

Exercice 4
PARTIE 1.

(1) (a) Par définition, d est positive et elle vérifie les propriétés de séparation d'après (ii) et de symétrie d'après (i). Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soient $x, y, z \in E^3$. Puisque d est positive, alors $d(x,y), d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ donc $\max(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et on conclut grâce à (iii).

(b) Sans perte de généralité, on suppose $d(x,y) < d(y,z)$ (le cas $d(x,y) > d(y,z)$ est symétrique : il suffit d'échanger x et z). D'après (iii),

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) = d(y,z) \tag{1}$$

et

$$d(y,z) \leq \max(d(y,x), d(x,z)) := m\,. \tag{2}$$

Si $m = d(y,x)$ alors $d(y,z) \leq d(y,x)$, ce qui contredit l'hypothèse du début. Ainsi, on a nécessairement $m = d(x,z)$. Les inégalités (1) et (2) donnent donc $d(x,z) \leq d(y,z) \leq d(x,z)$ d'où $d(x,z) = d(y,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.

(2) (a) Puisque $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, il existe $a \in B_1 \cap B_2$, et $d(x,y) \leq \max(d(x,a), d(a,y))$ or $d(x,a) < r \leq r'$ et $d(a,y) \leq r'$ donc $d(x,y) < r'$.
Soit $z \in B_1$. On a

$$d(y,z) \leq \max(d(y,x), d(x,z)),$$

$d(y,x) < r'$, $d(x,z) < r \leq r'$, d'où $d(y,z) < r'$ c'est-à-dire $z \in B_2$.

(b) Puisque $r \leq r'$, on a vu que $B_1 \subset B_2$. De même, puisque $r' \leq r$, on a $B_2 \subset B_1$. Ainsi, $B_1 = B_2$.

(3) Soit $B := B(x,r)$ une boule ouverte, $x \in E$ et $r \geq 0$. Si $r = 0$ alors $B = \emptyset$ et le résultat est vérifié. Supposons $r > 0$ (donc B est non vide). Soit $(x_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a \in E$. Montrons que $a \in B$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $d(x_n, a) < r$. On a donc en particulier, $x_N \in B(a,r) \cap B$, qui est donc non vide. D'après la question précédente, $B(a,r) = B$ donc $a \in B$ et B est bien fermé.
Autre méthode pour montrer que $a \in B$: utiliser que $d(a,x) \leq \max(d(a,x_N), d(x_N,x))$.

(4) Soit $y \in \overline{B}(x,r) := \overline{B}$. Montrons que $B(y,r) \subset \overline{B}$. Soit $z \in B(y,r)$ (existe car $r > 0$). On a

$$d(z,x) \leq \max(\underbrace{d(z,y)}_{<r}, \underbrace{d(y,x)}_{\leq r}) \leq r$$

d'où $z \in \overline{B}$. Ainsi, $\overline{B}$ est ouvert car pour tout $y \in \overline{B}$, il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset \overline{B}$.

PARTIE 2.

(1) Puisque f est positive et que $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $x, y \in E$, $d := 1/f$ est aussi symétrique et positive. De plus,

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y) = +\infty \Longleftrightarrow x = y\,.$$

Il reste à vérifier que d satisfait la propriété (iii). Soient $x, y, z \in E$. Si $x = z$ alors (iii) est clairement vérifiée (car $d(x, z) = 0$ et la distance est positive). Sinon, $x \neq z$ et nous allons montrer le résultat suivant, qui est équivalent à (iii) :

$$f(x, z) \geq \min(f(x, y), f(y, z)) \, .$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(x, y) \leq f(y, z)$. Supposons aussi que $f(x, y) > 1$ car sinon $f(x, y) = 1$ et puisque $f \geq 1$, le résultat est immédiat. Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq f(x, y) - 1$, on a donc $x_n = y_n$ et $y_n = z_n$ (car $n < f(y, z)$). Cela implique que $x_n = z_n$ pour tous ces entiers n donc

$$f(x, z) \geq f(x, y) = \min(f(x, y), f(y, z)) \, .$$

(2) Par définition, pour tous $x, y \in E$, on a $f(x, y) \geq 1$, ce qui implique $d(x, y) \leq 1$. Puisque X contient au moins deux éléments, notons a et b deux éléments distincts, alors on peut considérer par exemple les deux suites constantes x et y dont les termes sont égaux à a et b respectivement. Ces deux suites vérifient $d(x, y) = 1$ d'où $\sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in E\} = 1$.

(3) On a

$$y \in B(x, r) \iff d(x, y) < r \iff f(x, y) > 1/r \iff f(x, y) \geq \lfloor 1/r \rfloor + 1 \, ,$$

où la dernière équivalence vient du fait que $f(x, y)$ est un entier ou $+\infty$. Ainsi, $B(x, r)$ est l'ensemble des suites qui sont égales à x au moins jusqu'au rang $\lfloor 1/r \rfloor$ (partie entière inférieure de $1/r$). Autrement dit, en notant $x = (x_k)_k$,

$$B(x, r) = \{(y_k)_k \in E \,:\, \forall k \in [\![1, \lfloor 1/r \rfloor]\!] \, , x_k = y_k\} \, .$$

(4) Soit $(x^m)_m$ une suite de Cauchy dans (E, d). On note $x^m = (x_k^m)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $N_\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N_\ell$, on a $d(x^m, x^n) \leq 1/(\ell+1)$ c'est-à-dire $\ell + 1 \leq f(x^m, x^n)$, ce qui signifie que pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$, $x_k^m = x_k^n$. En résumé, on a

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \, \exists N_\ell \in \mathbb{N}, \, \forall m, n \geq N_\ell, \forall k \in [\![1, \ell]\!], \, x_k^m = x_k^n \, . \tag{3}$$

Pour chaque ℓ, on fixe un tel entier N_ℓ et on peut supposer que la suite $(N_\ell)_\ell$ est croissante (possible car la conclusion de (3) est en particulier vérifiée pour tout $m, n \geq N$ où $N \geq N_\ell$).

Idée informelle : pour tous les m assez grands, disons $m \geq N$, les suites $x^N, x^{N+1}, \ldots$ ont toutes leurs premiers termes égaux, ils sont "fixés". De plus, si on augmente N, il y aura de plus en plus de termes "fixés". On va noter a la suite de ces termes "fixés".

On note a la suite $(x_\ell^{N_\ell})_\ell$ et on montre que $(x^m)_m$ converge vers a c'est-à-dire $f(x^m, a) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. D'après (3), avec $\ell = M$ et $n = N_M$, on a

$$\forall m \geq N_M, \, \forall j \in [\![1, M]\!], \, x_j^m = x_j^{N_M} \, .$$

Pour montrer qu'à partir du rang N_M, on a $f(x^m, a) > M$, il reste à montrer que $x_j^{N_M} = x_j^{N_j}$ pour tout $j \in [\![1, M]\!]$ (car l'égalité précedente nous donnerait donc que les suites a et x^m sont égales jusqu'au rang M). Or, si $j \in [\![1, M]\!]$, d'après (3) avec

$\ell = j$, $m = N_j$, $n = N_M \geq N_j$ (car on a supposé la suite $(N_k)_k$ croissante) et $k = j$, on a bien $x_j^{N_j} = x_j^{N_M}$. On a ainsi montré

$$\forall M \in \mathbb{N},\, \exists N_M \in \mathbb{N},\, \forall m \geq N_M,\, f(x^m, a) > M\,,$$

ce qui signifie que $f(x^m, a) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ soit $d(x^m, a) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite (x^m) est convergente (de limite a) donc l'espace métrique (E, d) est complet.

PARTIE 3.

A la fin de la partie 1, on a montré que les boules fermées de rayon > 0 sont ouvertes. On peut se demander si c'est le cas des boules fermées de rayon nul, c'est-à-dire les singletons. Reprenons l'exemple de la partie précédente avec $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Soit x la suite constante égale à 0. Montrons que l'ensemble fermé $\{x\}$ n'est pas un ouvert. Supposons par l'absurde qu'il est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \{x\}$. D'après la question 3 de la partie 2, on a donc que $B(x, \varepsilon)$ est l'ensemble des suites qui sont égales à la suite x jusqu'au rang $N := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Par exemple, $y = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in B(x, \varepsilon)$ où le terme non nul est au rang $N + 1$. Ainsi, $y \in \{x\}$ et $x \neq y$, ce qui est une contradiction.