**Contrôle du 30/09/2024**

*Durée : 1h30. Le sujet comporte* **2 pages***. Documents, objets connectés (téléphones, montres, etc) interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Toute réponse doit être soigneusement justifiée (nous tiendrons compte de la présentation et de la rédaction).*

**Exercice 1.** (environ 2 points) Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides bornés.

1. Rappeler la définition de $\inf(A)$.
2. Trouver une relation entre $\inf(A \cup B)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$. (Démontrer votre réponse !)
3. Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$ (on rappelle que $-A = \{-a \ : \ a \in A\}$).

**Exercice 2.** (environ 2 points) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.
2. Démontrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k$ est un valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ et si $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

**Exercice 3.** (environ 9 points) On fixe deux réels strictement positifs $p$ et $q$ tels que $p + q = 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels vérifiant la relation de récurrence $u_n = pu_{n-1} + qu_{n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sans calculer le terme général $u_n$. Par commodité, on définit $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en posant $u_n = 0$ pour tout entier $n \leqslant -1$.

1. Soit $M = \max(|u_0|, |u_1|, |u_2|)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n + qu_{n-1} + qu_{n-2} = u_2 + qu_1 + qu_0$.
3. En déduire que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $\frac{u_2+qu_1+qu_0}{1+2q}$
4. On note $\ell = \limsup u_n$. On considère une application strictement croissante $\phi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.
   (a) Pourquoi une telle application existe-t-elle ?
   (b) En admettant l'inégalité (vue en TD)
   $$\liminf(x_n + y_n) \leqslant \liminf x_n + \limsup y_n$$
   valable pour toutes les suites bornées de réels $(x_n)$ et $(y_n)$, et en utilisant la relation de récurrence, montrer que $\liminf u_{\phi(n)-1} \geqslant \ell$
   (c) En déduire que la suite $(u_{\phi(n)-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$.
   (d) En déduire que $(u_{\phi(n)-2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\phi(n)-3})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers $\ell$.
   (e) En utilisant le résultat de la question **??**, montrer que $\ell = \frac{u_2+qu_1+qu_0}{1+2q}$.
5. Conclure. *Indication : on pourra appliquer le résultat de la question* **??** *à la suite* $(-u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

**Exercice 4.** (environ 7 points) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que

$$\forall j,k \geq 0,\ \ (j+k)x_{j+k} \leq jx_j + kx_k\,.$$

Soit $\ell = \inf(\{x_n; n\in\mathbb{N}\})$.

1. a) Soit $j\in\mathbb{N}$. Montrer que $x_{kj} \leq x_j$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
   b) En déduire que la suite $(x_n)$ possède des valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$.
2. a) Montrer que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}$,

   $$x_{N+p} - \ell < \varepsilon\,.$$

   *Indication : on pourra utiliser des divisions euclidiennes.*
   b) En déduire que la suite $(x_n)$ converge et que sa limite est $\ell$.
3. Donner un exemple de suite non constante qui satisfait la condition de l'énoncé.