

Contrôle du 30/09/2024

Durée : 1h30. Le sujet comporte 2 pages. Documents, objets connectés (téléphones, montres, etc) interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Toute réponse doit être soigneusement justifiée (nous tiendrons compte de la présentation et de la rédaction).

Exercice 1. (environ 2 points) Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides bornés.

1. Rappeler la définition de $\inf(A)$.
2. Trouver une relation entre $\inf(A \cup B)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$. (Démontrer votre réponse !)
3. Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$ (on rappelle que $-A = \{-a : a \in A\}$).

Exercice 2. (environ 2 points) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.
2. Démontrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ_k est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ et si $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$, alors λ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Exercice 3. (environ 9 points) On fixe deux réels strictement positifs p et q tels que $p + q = 1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels vérifiant la relation de récurrence $u_n = pu_{n-1} + qu_{n-3}$ pour tout entier $n \geq 3$. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sans calculer le terme général u_n . Par commodité, on définit u_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en posant $u_n = 0$ pour tout entier $n \leq -1$.

1. Soit $M = \max(|u_0|, |u_1|, |u_2|)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n + qu_{n-1} + qu_{n-2} = u_2 + qu_1 + qu_0$.
3. En déduire que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $\frac{u_2 + qu_1 + qu_0}{1 + 2q}$.
4. On note $\ell = \limsup u_n$. On considère une application strictement croissante ϕ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
 - (a) Pourquoi une telle application existe-t-elle ?
 - (b) En admettant l'inégalité (vue en TD)

$$\liminf(x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n$$

valable pour toutes les suites bornées de réels (x_n) et (y_n) , et en utilisant la relation de récurrence, montrer que $\liminf u_{\phi(n)-1} \geq \ell$

- (c) En déduire que la suite $(u_{\phi(n)-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .
 - (d) En déduire que $(u_{\phi(n)-2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{\phi(n)-3})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers ℓ .
 - (e) En utilisant le résultat de la question ??, montrer que $\ell = \frac{u_2 + qu_1 + qu_0}{1 + 2q}$.
5. Conclure. *Indication : on pourra appliquer le résultat de la question ?? à la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Exercice 4. (environ 7 points) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que

$$\forall j, k \geq 0, (j+k)x_{j+k} \leq jx_j + kx_k.$$

Soit $\ell = \inf(\{x_n; n \in \mathbb{N}\})$.

1. a) Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{kj} \leq x_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
b) En déduire que la suite (x_n) possède des valeurs d'adhérence dans \mathbb{R} .
c) Montrer que ℓ est une valeur d'adhérence de (x_n) .
2. a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$x_{N+p} - \ell < \varepsilon.$$

Indication : on pourra utiliser des divisions euclidiennes d'indices de la suite.

- b) En déduire que la suite (x_n) converge et que sa limite est ℓ .
3. Donner un exemple de suite non constante qui satisfait la condition de l'énoncé.