MAT 402 — Groupe MAT 2

Premier contrôle continu (17 février 2025)

Durée : 1 h.
Documents, calculatrices, objets connectés interdits. Le barème sur 10 est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (1 pt) Enoncer le résultat du cours concernant les intégrales et la convergence uniforme des suites de fonctions.

Exercice 2. (5 pts) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0, 1/n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la limite simple de la suite (f_n) (justifiez soigneusement).
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $\int_0^1 f_n(x)\, dx$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Soit $a \in]0,1[$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

Exercice 3. (4 pts) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout x par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx^2}$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple $D \subset \mathbb{R}$ de la suite f_n, et calculer la limite simple sur D.
2. Etudier la convergence uniforme sur D.
3. Pour $a > 0$ fixé, y a-t-il convergence uniforme sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$?

Exercice 4. Question bonus : étudier en fonction du paramètre $\alpha \in]0, +\infty[$ la convergence uniforme de la suite (g_n) de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g_n(x) = \sin(nx)/(1+n^\alpha x^2)$ (noter que vous avez traité le cas particulier $\alpha = 1$ dans l'exercice précédent).