Techniques de comptage

Notation.
Soit A un ensemble fini. On note $|A|$ ou $\text{Card}(A)$ le nombre des éléments de A.

Propriétés 1 (Propriétés élémentaires des cardinaux)**.**

1. Soit $A,\ B$ deux ensembles finis, on a :
   a) Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \varnothing$), alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.
   b) Plus généralement : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
   c) Pour le produit cartésien : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. **Généralisation.** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des ensembles finis.
   a) Si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ sont deux à deux disjoints, alors
   $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_r|$$
   b) $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_r|$
3. Soit $f :\ A \to B$ une application.
   a) Si f est injective, alors $|A| \leqslant |B|$.
   b) Si f est surjective, alors $|A| \geqslant |B|$.
   c) Si f est bijective, alors $|A| = |B|$.

Démonstrations

1. a) On note $n = |A|$ et $p = |B|$; $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$.
   Comme $A \cap B = \varnothing$, alors on peut écrire $A \cup B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_p\}$: il n'y a pas de redondance entre les éléments de A et de B, et $A \cup B$ contient $n + p$ éléments distincts :
   $$|A \cup B| = n + p = |A| + |B|$$
   b) On introduit : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$: l'ensemble des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B. Alors :
   $(A \setminus B) \cap B = (A \cap \overline{B}) \cap B = A \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \varnothing = \varnothing$, et
   $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \varnothing B) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$.
   De tout ceci et de a) on déduit que : $|A \cup B| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B|$.
   D'autre part : $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cap A \cap B \subset \overline{B} \cap B = \varnothing$
   et $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap \Omega = A$, donc :
   $|(A \setminus B) \cup (A \cap B)| = |A \setminus B| + |A \cap B| \iff |A \cap B| = |A| - |A \cap B|$, et finalement :
   $$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
   c) $A \times B = \{(a_i, b_j);\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant p\}$ et comme si $(i, j) \neq (k, \ell)$ alors $(a_i, b_j) \neq (a_k, b_\ell)$ alors $|A \times B| = n \times p = |A| \cdot |B|$.
2. a) Preuve par récurrence.
   Initialisation. $|A_1| = |A_1|$: le résultat demandé est vrai pour $n = 1$.
   Hypothèse de récurrence. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints alors $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

Hérédité. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des ensembles finis deux à deux disjoints ; on a :
$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1}) = \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing = \varnothing$, d'où :
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \overset{1.a)}{=} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|$
$\overset{H.R.}{=} |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|$ donc la propriété est héréditaire.

b) Par récurrence.
Initialisation. $|A_1| = |A_1|$.
Hypothèse de récurrence. Si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ sont des ensembles finis, alors $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_r|$.
Hérédité. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_r, A_{r+1}$ des ensembles finis, on a alors :

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r \times A_{r+1}| = |(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r) \times A_{r+1}| \overset{1.c)}{=} |A_1 \times \ldots \times A_r| \cdot |A_{r+1}| \overset{H.R.}{=} |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_r| \cdot |A_{r+1}|$$

CQFD.
En particulier, $|A_1^r| = |A_1|^r$.

3. a) Si $f : A \to B$ est injective, alors $f(a_1), \ldots, f(a_r)$ sont deux à deux distincts, donc $|f(A)| = |\{f(a_1), \ldots, f(a_r)\}| = r = |A|$ et comme $f(A) \subset B$ alors $|B| \geqslant |f(A)| = r = |A|$.
   b) Si $f : A \to B$ est surjective (soit $f(A) = B$) : pour $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, soit $\alpha_i \in A$ tel que $f(\alpha_i) = b_i$. Comme $b_1, \ldots, b_p$ sont deux à deux distincts, alors les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont deux à deux distincts et comme ce sont des éléments de A : $|A| \geqslant p = |B|$.
   c) f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, donc $|A| \leqslant |B|$ et $|B| \leqslant |A|$: donc $|A| = |B|$.

   Conséquence : Pour montrer que deux ensembles finis A et B ont même cardinal, on sera souvent amené à exhiber ou construire une application bijective entre A et B.

Définition 1 (Image réciproque)**.**

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application ; à f on associe une application (image réciproque de f)
$$f^{-1} : \begin{array}{l} \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E) \\ \quad B \mapsto f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\} \end{array},$$
où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Propriétés 2 (Propriétés de l'image réciproque)**.**

1. $f^{-1}(F) = E$.
2. Soit $\{B_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de F. Alors :
   a) $f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \big(f^{-1}(B_i)\big)$.
   b) $f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \big(f^{-1}(B_i)\big)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$, on pose $y = f(x) \in F$, alors $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(F)$, donc $E \subset f^{-1}(F)$; réciproquement et par définition, $f^{-1}(F)$ est une partie de E, donc finalement $f^{-1}(F) = E$.
2. a)

$$\Big(x \in f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} B_i\big)\Big) \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \Big(f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i\Big)$$

$$\begin{aligned} &\iff \left(\exists i_0 \in I \text{ tel que } f(x) \in B_{i_0}\right) \\ &\iff \left(\exists i_0 \in I \text{ tel que } x \in f^{-1}(B_{i_0})\right) \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} \big(f^{-1}(B_i)\big)$.

b)

$$\begin{aligned} \Big(x \in f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big)\Big) &\overset{\text{déf.}}{\iff} \Big(f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i\Big) \\ &\iff \big(\forall i \in I,\ f(x) \in B_i\big) \\ &\iff \big(\forall i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i)\big) \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \big(f^{-1}(B_i)\big) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} \big(f^{-1}(B_i)\big)$.

Lemme (des Bergers)**.**

Soit E et F deux ensembles finis, et $\varphi :\ E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall y \in F,\ |\varphi^{-1}(\{y\})| = k$.
Alors $|E| = k \cdot |F|$.

Pour compter ses moutons, le berger a deux solutions : soit il compte le nombre de têtes (chaque mouton a une seule tête), soit il compte le nombre de pattes ; comme chaque mouton a quatre pattes, alors : nombre de moutons $= \dfrac{\text{nombre de pattes}}{4}$.

Démonstration. D'après les propriétés 2. (de l'image réciproque) :
$E = \varphi^{-1}(F) = \varphi^{-1}\Big(\bigcup\limits_{y\in F} \{y\}\Big) \overset{2.a)}{=} \bigcup\limits_{y\in F} \big(\varphi^{-1}(\{y\})\big)$.
Or il est évident que si y et y' sont deux éléments de F tels que $y \neq y'$, alors $\big(\varphi^{-1}(\{y\})\big) \cap \big(\varphi^{-1}(\{y'\})\big) = \varnothing$.

Les $\varphi^{-1}(\{y\})$ pour $y \in F$ sont donc deux à deux disjoints, d'où :

$$|E| = \Big|\bigcup_{y\in F} \varphi^{-1}(\{y\})\Big| = \sum_{y\in F} |\varphi^{-1}(\{y\})| = k.|F|$$

puisque : $\forall y \in F,\ |\varphi^{-1}(\{y\})| = k$.

Proposition 3.

Soit E et F deux ensembles finis. On note $n = |E|$ et $p = |F|$. Alors $|\mathcal{A}pp(E,F)| = p^n (= |F|^{|E|})$ où $\mathcal{A}pp(E,F)$ est l'ensemble des applications de E vers F.

Démonstration. Par récurrence sur $n = |E|$.
Initialisation. si $n = |E| = 1$, alors $E = \{a\}$ et $F = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$. Alors dans ce cas, $\mathcal{A}pp(E,F) =$

$\mathcal{A}pp(\{a\},F)$ est l'ensemble des application $f_{b_i}:\ \begin{array}{l}\{a\}=E\to F\\ \quad a\mapsto b_i\end{array}$.

Les éléments $b_1,\dots,b_p$ sont deux à deux distincts, donc les applications $f_{b_1},\dots,f_{b_p}$ sont deux à deux distinctes et $|\mathcal{A}pp(E,F)|=p=p^1$.

Hypothèse de récurrence. Si A est un ensemble fini tel que $|A|=n$, alors $|\mathcal{A}pp(A,F)|=p^n$.

Hérédité. Soit E un ensemble fini tel que $|E|=n+1$, et soit $a\in E$. On pose $E'=E\setminus\{a\}$, alors $|E'|=n$ et par hypothès de récurrence : $|\mathcal{A}pp(E',F)|=p^n$.

Soit maintenant l'application $\varphi:\ \begin{array}{l}\mathcal{A}pp(E,F)\to\mathcal{A}pp(E,F)\\ \qquad f\mapsto f_{|E'}\end{array}$: il est évident que $\forall g\in\mathcal{A}pp(E',F)$,

$\varphi^{-1}(g)=\{\tilde{g}_i;\ 1\leqslant i\leqslant p\}$ où $\tilde{g}_i:\ \begin{array}{l}E\to F\\ x\mapsto\begin{cases}g(x) & \text{si } x\in E'\\ b_i & \text{si } x=a\end{cases}\end{array}$. On a alors $|\varphi^{-1}(g)|=p$, donc d'après le lemme des bergers :

$|\mathcal{A}pp(E,F)|=p\cdot|\mathcal{A}pp(E',F)|=p\cdot p^n=p^{n+1}$ CQFD.

Proposition 4.

Soit E et F deux ensembles finis avec $|E|\leqslant|F|$; on note $n=|E|$ et $p=|F|$.

Soit $\mathcal{I}nj(E,F)$ l'ensemble des applications injectives de E vers F, alors :

$|\mathcal{I}nj(E,F)|=p(p-1)\cdots(p-n+1)$.

Démonstration. Par récurrence sur $n=|E|$. On note $F=\{b_1,\dots,b_p\}$.

Initialisation. Si $n=|E|=1$, alors $E=\{a\}$ et il est évident que :

$\mathcal{I}nj(E,F)=\{f_{b_i};\ 1\leqslant i\leqslant p\}$, et donc $|\mathcal{I}nj(\{a\},F)|=p$.

Hypothèse de récurrence. Si A est un ensemble fini tel que $|A|=n\leqslant p$, alors $|\mathcal{I}nj(A,F)|=p(p-1)\cdots(p-n+1)$.

Hérédité. On suppose que $|E|=n+1$ avec $n+1\leqslant p$. Soit $a\in E$ et $E'=E\setminus\{a\}$, on a : $|E'|=n$ et par hypothèse de récurrence : $|\mathcal{A}pp(E',F)|=p(p-1)\cdots(p-n+1)$.

Soit l'application $\varphi:\ \begin{array}{l}\mathcal{I}nj(E,F)\to\mathcal{I}nj(E',F)\\ \qquad f\mapsto f_{|E'}\end{array}$, alors on a :

$\forall g\in\mathcal{I}nj(E',F),\ \varphi^{-1}(\{g\})=\{\tilde{g}_b;\ b\in F\setminus f(E')\}$,

où $\tilde{g}_b:\ \begin{array}{l}E\to F\\ x\mapsto\begin{cases}g(x) & \text{si } x\in E'\\ b & \text{si } x=a\end{cases}\end{array}$, et alors :

$|\varphi^{-1}(\{g\})=|F\setminus f(E')|=|F|-|f(E')|=p-n\geqslant 1$ donc φ est surjective, et d'après le lemme des Bergers :

$|\mathcal{I}nj(E,F)|=(p-n)|\mathcal{I}nj(E',F)|=(p-n)\cdot n(p-1)\cdots(p-n+1)=p(p-1)\cdots(p-n+1)(p-n)$ CQFD

Proposition 5 (Corollaire)**.**

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E|=|F|=n$, alors $|\mathcal{B}ij(E,F)|=n!$

où $\mathcal{B}ij(E,F)$ est l'ensemble des applications bijectives de E sur F.

Démonstration. $|\mathcal{B}ij(E,F)|=|\mathcal{I}nj(E,F)|$ car $|E|=|F|$, donc

$|\mathcal{B}ij(E,F)=n(n-1)\cdots(n-n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$.

Proposition 6.

Soit E un ensemble fini, on note $n = |E|$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E qui possèdent k élements.

On note $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(E)|$ le nombre de parties de E à k éléments :

Alors : $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Démonstration. On note $\mathcal{J} = \mathcal{I}nj\big(\{1,2,\ldots,k\};E\big)$: on sait que $|\mathcal{J}| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
Soit alors l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{J} \to \mathcal{P}_k(E) \\ f \mapsto f(\{1,2,\ldots,k\}) \end{array}$.
Soit $B \in \mathcal{P}_k(E)$: il est évident que $\varphi^{-1}(B) = \mathcal{B}ij(\{1,2,\ldots,k\};B)$, donc
$|\varphi^{-1}(B)| = |\mathcal{B}ij(\{1,2,\ldots,k\};B)| = k!$, et par le lemme des Bergers :
$|\mathcal{J}| = k!|\mathcal{P}_k(E)|$, donc $|\mathcal{P}_k(E)| = \dfrac{|\mathcal{J}|}{k!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Proposition 7.

$$\Big|\big\{(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in \{1,2,\ldots,n\}^k \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\big\}\Big| = \binom{n}{k}$$

Démonstration. On note $I_k = \big\{(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in \{1,2,\ldots,n\}^k \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\big\}$.
Soit l'application $\varphi : \begin{array}{r} I_k \to \mathcal{P}_k(\{1,2,\ldots,n\}) \\ (i_1,\ldots,i_k) \mapsto \{i_1,\ldots,i_k\} \end{array}$.
Il est évident que φ est bijective : les k éléments deux à deux distincts d'une partie de $\mathcal{P}_k(\{1,2,\ldots,n\})$ se rangent d'une et une seule façon dans l'ordre strictement croissant !

Ainsi : $|I_k| = |\mathcal{P}_k(\{1,2,\ldots,n\})| = \binom{n}{k}$.

Proposition 8.

Soit E un ensemble fini, on note $n = |E|$. Alors : $\quad |\mathcal{P}(E)| = 2^n$, où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E.

Démonstration. Soit l'application $\psi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{A}pp(\{0,1\};E) \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{array}$
où pour toute partie A, $\mathbb{1}_A : \begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est la **fonction indicatrice** de A, et soit $g \in \mathcal{A}pp(\{0,1\};E)$.

On note $A = \{x \in E \text{ tel que } g(x) = 1\}$, alors : $\forall x \in E,\ g(x) = 1 \iff x \in A$ et sinon $g(x) = 0$, donc $g = \mathbb{1}_A = \psi(A)$ et ψ est surjective.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\psi(A) = \psi(B)$ (soit $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$), alors :
$(x \in A) \iff (\mathbb{1}_A(x) = 1) \iff (\mathbb{1}_B(x) = 1) \iff x \in B$, donc $A = B$ et ψ est injective, donc bijective et par conséquent :

$$|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{A}pp(\{0,1\};E)| = 2^n$$

Lemme.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\Big)$$

soit :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = 1 + \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \cdots + x_1x_2\cdots x_n$$

Démonstration. Par récurrence sur n, le nombre de facteurs dans le produit.

Initialisation. Pour $n=1$: $1 + \sum_{k=1}^{1}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant 1} x_{i_1} = 1 + x_1 = \prod_{i=1}^{1} x_i$.

Hypothèse de récurrence. $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\Big)$.

Hérédité.

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = \Big(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\Big)\cdot(1+x_{n+1}) = \Big(1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\Big)\cdot(1+x_{n+1})$$

$$= \Big(1 + \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \cdots + x_1x_2\cdots x_n\Big)\cdot(1+x_{n+1})$$

$$= 1 + \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \cdots + x_1x_2\cdots x_n$$

$$+ x_{n+1} + \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}x_{n+1} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_{n+1} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_{n-1}}x_{n+1} + x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{i_1=1}^{n+1} x_{i_1} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n+1} x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n+1} x_{i_1}\cdots x_{i_n} + x_1\cdots x_{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1} x_{i_1}\cdots x_{i_k}\Big)$$

Remarques. Soit E un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E ($A_i \subset E$). Alors les fonctions indicatrices vérifient les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ pour tout $A \subset E$.
2. $\mathbb{1}_{A_1}\cdot\mathbb{1}_{A_2}\cdots\mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}$.
3. Si A est une partie finie de E, alors : $\sum_{x\in E}\mathbb{1}_A(x) = |A|$.
4. $\mathbb{1}_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}$.

Démonstration.

1. Pour tout $x \in E$: $\quad (1 - \mathbb{1}_A)(x) = \begin{cases} 1-1 & \text{si } x \in A \\ 1-0 & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases} = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x).$

2. Pour tout $x \in E$: $\mathbb{1}_{A_1}(x) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x)$ est un produit de n facteurs valant chacun soit 0 soit 1 : il vaut donc 0 ou 1, et prend la valeur 1 si et seulement si chacun des n facteurs vaut 1, c'est-à-dire :

$$\mathbb{1}_{A_1}(x) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_1 \text{ et } x \in A_2 \ldots \text{ et} x \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(x)$$

3. Pour tout $x \in E$: $\displaystyle\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x \in \overline{A}} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \in \overline{A}} 0 = |A| + 0 = |A|.$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &\overset{1.}{=} 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}} \quad \text{loi de de Morgan} \\
&\overset{2.}{=} 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1}} \cdot \mathbb{1}_{\overline{A_2}} \cdots \mathbb{1}_{\overline{A_n}} \overset{1.}{=} 1 - (1 - \mathbb{1}_{A_1}) \cdot (1 - \mathbb{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbb{1}_{A_n}) \\
&= 1 - \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-\mathbb{1}_{A_{i_1}})(-\mathbb{1}_{A_{i_2}}) \cdots (-\mathbb{1}_{A_{i_k}}) \Big)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdot \mathbb{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}} \Big) \overset{2.}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}} \Big)
\end{aligned}$$

Théorème 1 (Principe d'inclusion - exclusion)**.**
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E. Alors :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \Big)$$

Démonstration. D'après les propriétés des fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &\overset{3.}{=} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}(x) \overset{4.}{=} \sum_{x \in E} \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(x) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \Big(\sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(x) \Big) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \Big)
\end{aligned}$$

Remarque. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des événements, alors en utilisant le fait que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ (l'espérance de la variable de Bernoulli associée à A est la probabilité de A), on trouve par la même méthode la **formule du crible de Poincaré** :

$$\mathbb{P}\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \Big)$$

Applications du principe d'inclusion - exclusion

Proposition 9 (Nobmre de surjections)**.**
Soit E et F deux ensembles finis avec $|E| \geqslant |F|$; on note $n = |E|$, $p = |F|$ et $S(n,p) = |\mathcal{S}urj(E,F)|$ où $\mathcal{S}urj(E,F)$ est l'ensemble des applications surjectives de E vers F.

Alors : $\quad S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$

Démonstration. On note $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$: pour tout entier i compris entre 1 et p, soit $A_i = \{f \in \mathcal{A}pp(E,F)$ tel que $y_i \notin f(E)\}$.

Il est évidenty que $\mathcal{S}urj(E,F) = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i}$, d'où :

$$S(n,p) = \Big|\overline{\bigcup_{i=1}^{p} A_i}\Big| = \big|\mathcal{A}pp(E,F)\big| - \Big|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\Big| \qquad \text{donc par principe d'inclusion - exclusion}$$

$$= p^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Or on vérifie facilement que $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (p-k)^n$
et $\Big|\big\{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p\Big| = \dbinom{p}{k}$, d'où :

$$S(n,p) = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k} (p-k)^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{p-k} k^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

par changement d'indice $p \to p-k$ et symétrie des coefficients binomiaux.

Proposition 10 (Dérangements)**.**
Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **dérangement** de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant.

On note D_n le nombre de dérangements de E, et on pose par convention $D_0 = 1$. Alors :

$$D_n = n!\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\Big)$$

Démonstration. On note $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; pour tout entier i compris entre 1 et n, soit $A_i = \big\{f :\ E \to E$ permutation telle que $f(x_i) = x_i\big\}$, on a :

$$D_n = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right|$$

$$= n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \Big)$$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{n!}{k!(n-k)!} . (n-k)!$$

$$= n! \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Big)$$

Proposition 11 (Indicateur d'Euler)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, décomposé en facteurs premiers sous la forme $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdots {p_r}^{\alpha_r}$ où $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers 2 à 2 distincts, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.
On note : $\varphi(n) = \Big| \big\{ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } k \wedge n = 1 \big\} \Big|$.
Alors : $\quad \varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \big(1 - \frac{1}{p_i}\big)$.

Démonstration. Soit d un diviseur de n, et D_d l'ensemble des multiples de d qui appartiennent à $\{1, 2, \ldots, n\}$:
alors $D_d = \{d, 2d, \ldots, \frac{n}{d} \cdot d\}$ donc $|D_d| = \dfrac{n}{d}$; d'autre part :

$$\begin{aligned}
\big(m \in D_{p_{i_1}} \cap D_{p_{i_2}} \cap \cdots \cap D_{p_{i_k}}\big) &\iff \big(m \text{ est un multiple de } p_{i_1} \text{ et de } p_{i_2} \ldots \text{ et de } p_{i_k}\big) \\
&\iff \big(m \text{ est un multiple de } p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_k}\big) \qquad \text{car les } p_{i_j} \text{ sont premiers} \\
&\iff \big(m \in D_{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_k}}\big)
\end{aligned}$$

Donc :

$$D_{p_{i_1}} \cap D_{p_{i_2}} \cap \cdots \cap D_{p_{i_k}} = D_{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}, \text{ puis } |D_{p_{i_1}} \cap D_{p_{i_2}} \cap \cdots \cap D_{p_{i_k}}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

Or, on a $\varphi(n) = |B_n|$, où $B_n = \big\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } k \wedge n = 1\big\}$, et on voit facilement que : $\overline{B_n} = D_{p_1} \cap D_{p_2} \cap \cdots \cap D_{p_r}$; ainsi, d'après le principe d'inclusion-exclusion :

$$\varphi(n) = |B_n| = n - |\overline{B_n}| = n - |D_{p_1} \cap D_{p_2} \cap \cdots \cap D_{p_r}| = n - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$= n \Big(\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{1}{p_{i_1}} \cdot \frac{1}{p_{i_2}} \cdots \frac{1}{p_{i_k}} \Big) \Big) = n \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \frac{1}{p_i}\big)$$

d'après le lemme technique énoncé et démontré plus haut.

Théorème 2 (Formule d'inversion de Pascal)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad b_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_i$$

Démonstration. En notant $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, il est facile de vérifier que $B = PA$, avec

$$P = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour déterminant $\det(P) = 1$ (puisqu'elle est triangulaire et que ses coefficients binomiaux sont les nombres $\binom{k}{k} = 1$), donc P est inversible et $A = P^{-1}B$.

D'autre part, si on pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$ où x est un réel et $y = 1 + x$, alors :

Pour tout entier k compris entre 0 et n, $y^k = (1+x)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i$ d'après la formule du binôme de Newton, donc $PX = Y \iff X = P^{-1}Y$.

Or : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x^k = (1 + x - 1)^k = (y-1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y^i$ ce qui s'écrit matriciellement :

$$X = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0}(-1)^n & \binom{n}{1}(-1)^{n-1} & \cdots & -\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix} Y,$$ on a donc trouvé P^{-1} et on a bien via $A = P^{-1}B$:

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_i$$

Applications de la formule d'inversion de Pascal.

Cette formule permet de donner de nouvelles démonstrations pour deux résultats précédemment démontrés.

1. Nombre de surjections. Soit E et F deux ensembles finis.
On note $n = |E|$ et $p = |F|$ et on suppose que $n \geqslant p$. On note aussi $S(n,p)$ le nombre de surjections de E vers F. Alors :

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$$

Démonstration. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on note A_k l'ensemble des applications de E vers F dont l'image $f(E)$ possède k éléments.

Soit X une partie de F à k éléments (rappel : le nombre de ces parties vaut $\binom{p}{k}$) : il y a $S(n,k)$ applications de E vers F dont l'image $f(E)$ est égale à X.

Par conséquent : $|A_k| = \binom{p}{k} S(n,k)$ et comme $\mathcal{A}pp(E,F) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} A_k$, l'union étant disjointe, alors :

$\left|\mathcal{A}pp(E,F)\right| = \sum_{k=1}^{p} |A_k|$, soit : $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n,k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S(n,k)$ car $S(n,0)=0$.

La formule d'inversion de Pascal s'applique donc pour donner : $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$.

2. Nombre de dérangements. Soit E un ensemble fini avec $n = |E|$, on note D_n le nombre de dérangements de E (permutations de E sans point fixe).

Alors : $\qquad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Démonstration. Pour $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on note A_k l'ensemble des permutations de E qui laissent exactement k éléments de E invariants (soit k points fixes dans E). Pour dénombrer A_k on commence par choisir une partie X de E à k éléments (et on rappelle qu'il y a $\binom{n}{k}$ telles parties possibles) ; il y a alors exactement D_{n-k} permutations de E dont les points fixes sont exactement les éléments de X : on connaît en effet les images de chaque élément de X (eux-mêmes) et les $n-k$ éléments restants sont permutés entre eux sans point fixe.

Par conséquent, $|A_k| = \binom{n}{k} D_{n-k}$ et comme $\mathcal{S}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ où $\mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des permutations de E : les $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant deux à deux disjoints (puisque ces ensembles diffèrent quant au nombre des points fixes des permutations qu'ils contiennent), alors $|\mathcal{S}(E)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k|$, soit :

$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} \overset{[k\leftrightarrow n-k]}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ (sachant que $D_0 = 0$ par convention).

La formule d'inversion de Pascal s'applique donc, qui donne :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} \overset{[k\leftrightarrow n-k]}{=} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$