Dénombrement

Préparation à l'agrégation interne

Année 24/25

1 Notions

Vérifier si vous connaissez les notions ci-dessous et le cas échéant, les revoir

1. Théorie des ensembles : Appartenance, inclusion, égalité, réunion, intersection, lois de Morgan.
2. Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un ensemble fini.
3. Définition d'un ensemble dénombrable.
   (a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables.
   (b) Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4. Principes de dénombrement :
   (a) Principe de bijection (Exercices 3,6,9, partie 4.1,4.2.1)
   (b) Principe d'addition (Tous les exercices)
   (c) Principe de multiplication
   (d) Permutation, arrangement
   (e) Principe des tiroirs (Exercice 10)
   (f) Principe de division ou principe des bergers.
5. Parties d'un ensemble
   (a) Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments.
   (b) Cardinal de l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
6. Formules
   (a) Coefficients binomiaux. Formule du binome. Triangle de Pascal.
   (b) Coefficients multinomiaux.
   (c) Formule d'inclusion/exclusion.(Exercice 7)
7. Méthodes
   (a) Etablissement de formules de récurrence. Exercices 6,7
   (b) Utilisation de séries génératrices. Exercices 6,7,8.
8. Probalités sur un espace fini

2 Petits exercices

Exercice 1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \subset B$?
Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Exercice 2. Une inégalité Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E, ensemble fini. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap Aj| \leq |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Exercice 3. Quel le cardinal de $\{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq n\}$ où $k \leq n$?

Exercice 4. Montrer que $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Que représente ce nombre ?

Exercice 5. Montrer que $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
(On dénombrera de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments d'un ensemble comportant n boules rouges et n boules noires. On parle de preuve par double dénombrement).
Plus géneralement, montrer que pour tout $l \leq m + n$,

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$

On fait la convention que $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Exercice 6. De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

3 Proposition d'exercices pour les leçons 438 et 307

Ref pour certains : oraux X-ENS, algèbre 1 ; exercice d'algèbre pour l'agrégation, Francinou Gianella ; compléments d'algèbre et de géométrie, collection Capes/agreg ; livre pour l'oral d'exercices pour l'agreg interne ; Probabilités, Jean-Yves Ouvrard, tome 1 ; Probabilités Préparation à lâagrégation interne, Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt ; De l'intégration aux probabilités, Olivier Garet, Aline Kurtzmann ; Cotrell/Genon-Catalot/Duhamel/Meyre Exercices de probabilités ; Warusfel/Attali/Collet/Gautier/Nicolas mathématiques/Probabilités - Cours et exercices.

Exercice 7. Nombres de Fibonnaci On dispose d'un damier de taille $2 \times n$ et de dominos de taille 1×2 que l'on peut poser horizontalement ou verticalement.
On note F_n le nombre de façons de recouvrir le damier avec les dominos.

1. Calculer F_1, F_2, F_3.
2. Formule explicite 1

   (a) Montrer que si un domino est posé horizontalement sur la première ligne, alors il y a un autre domino juste en dessous.

(b) En déduire la formule :

$$F_n = \sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$

3. Formule de récurrence

(a) Montrer que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(b) Formule explicite 2

Montrer que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \right)$.

Exercice 8. Nombre de dérangements

On note pour $n \ge 1$, $D_n = |\{\sigma \in S_n / \ \forall x, \ \sigma(x) \ne x\}|$, c'est à dire le cardinal de l'ensemble des permutations à n éléments sans point fixe. On note pour $0 \le k \le n$, $\mathcal{P}_{k,n}$ l'ensemble des permutations à n éléments ayant k points fixes et $P_{k,n}$ son cardinal. On pose $D_0 = 1$.

1. **Méthode 1**

(a) Montrer que $P_{k,n} = \binom{n}{k} D_{n-k}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.

(c) Montrer par récurrence que $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2. **Méthode 2** Retrouver la formule précédente en utilisant la formule du crible.
3. **Méthode 3**

(a) Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{k \ge 0} \frac{D_k}{k!} z^k$. Montrer que le rayon de convergence est supérieur ou égal à

1. Montrer en utilisant la formule de la question 1(b) que $f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.

(b) Retrouver la formule

Exercice 9. Nombres de Bell

On note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. Montrer que $B_n \le n^n$.
2. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{k \ge 0} \frac{B_k}{k!} z^k$. Montrer que le rayon de convergence est strictement positif et montrer que $f(z) = e^{e^z - 1}$ en calculant $f'(z)$.
3. Montrer que $B_k = \frac{1}{e} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$.

Exercice 10. Nombres d'arbres

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un graphe est un arbre si pour tous sommets distincts de V a et b, il existe un unique chemin les reliant. Si $x \in V$, on note $d(x)$ le nombre d'arêtes issues de x. On appelle feuille un sommet de l'arbre n'ayant qu'un voisin, i.e. un sommet x tel que $d(x) = 1$.

On suppose que V et E sont des ensembles finis.

1. **Lemme des poignées de main**
   Montrer que $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$. *Principe de double comptage*
2. Montrer que si on enlève une arête à un arbre on obtient deux arbres.
3. Montrer par récurrence que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est $n-1$.
4. Montrer qu'un arbre a au moins deux feuilles.
5. **Algorithme de Prüfer** On suppose que $V = \{1, \ldots, n\}$. On définit la suite d'arbres $T_0, \ldots, T_{n-2}$ et la suite d'éléments de V, $a_1, \ldots, a_{n-2}$ par récurrence de la façon suivante :
   — $T_0 = G$.
   — Soit $i \geq 0$. On suppose $T_0, \ldots, T_i$ et $a_1, \ldots, a_{i-1}$ construits.
   On note b_{i+1} la plus petite feuille de T_i et a_{i+1} son voisin. On définit alors $T_{i+1} = T_i \setminus \{b_{i+1}\}$. C'est donc un arbre.

   Dessiner un arbre de sommets $\{1, \ldots, 7\}$ et trouver le 5-uplet $(a_1, \ldots, a_5)$ associé par l'algorithme précédent.
6. Montrer que l'algorithme précédent fournit une bijection de l'ensemble des arbres de sommets $\{1, \ldots, n\}$ sur $[\![1, n]\!]^{n-2}$.
   Pour ceci écrire un algorithme de décodage.

Exercice 11. Approximation d'un irrationnel par des rationnels
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de montrer qu'il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq q_n \leq n$ et $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$.
On définit $y_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tel que $|y_i - y_j| \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire le résulat.
3. En utilisant la propriété pour $x = 2\pi$, montrer que $(\cos n)_{n \geq 0}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 12. Un problème de collier
On considère un collier comportant $2a$ perles rouge et $2b$ perles bleues. Les perles sont fixées à une chainette circulaire fermée. On choisit une perle quelconque sur le collier et on numérote à partir de celle-ci dans le sens des aiguilles d'une montre toutes les perles. Les perles sont donc numérotées de 0 à $2a + 2b - 1$. Soit pour $0 \leq i < a + b$, $f(i)$ le nombre de perles rouges comprises au sens large entre la perle numéro i et la perle numéro $i + a + b - 1$.

1. Montrer que $|f(i+1) - f(i)| \leq 1$ et que $f(0) + f(a+b) = 2a$.
2. En déduire que l'on peut couper le collier en deux endroits de telle façon que les deux bouts obtenus comportent chacun le même nombre de perles rouges et bleues.

Exercice 13. Nombre de colliers de perles
Déterminer le nombre de colliers à 9 perles comportant 2 perles jaunes et 7 perles rouges.
Exercice sur les groupes et groupe opérant sur un ensemble.

4 Dénombrement, probabilités

4.1 Problème d'occupation

On dispose de n boites numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boites et on se demande quelle est le nombre de façons possibles de le faire.
Notons pour $1 \leq i \leq n$, a_i le nombre de balles dans la boite i. On cherche donc le cardinal de $\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}$.

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}| = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$$

Preuve : Représentons un élément de l'ensemble précédent de la façon suivante :

boites-eps-converted-to.pdf

On a sur cet exemple $n = 7$ et $k = 15$.
Ainsi une répartition des k balles dans les n boites correspond à un unique mot de k "ronds" et $n-1$ barres. (On enlève la cloison la plus à droite et la cloison la plus à gauche.)
Réciproquement un tel mot correspond à une répartition des k balles dans les n boites.
Par exemple le mot $OOOO|O||OOO|OO|OO|OOO$ correspond à la solution (4,1,0,3,2,2,3).
Un tel mot comporte $n+k-1$ lettres. Une fois qu'on a choisi l'emplacement des k ronds, le mot est déterminé. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k}$ solutions.

4.1.1 Une autre démonstration pour le problème d'occupation

Soient n et k des entiers naturels. On note G_n^k le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + \cdots + x_n = k$.
a) Déterminer G_n^0, G_n^1 et G_n^2 en fonction de n et G_2^k en fonction de k.
b) Démontrer que $G_{n+1}^{k+1} = G_{n+1}^k + G_n^{k+1}$. On pourra classer les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = k+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non.
c) En déduire que

$$G_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

4.1.2 Encore une autre démonstration pour le problème d'occupation

Notons $\mathcal{G}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 + \cdots + x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{H}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{U}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 < x_2 < \cdots < x_n = k + n - 1\}$.
Montrer que les applications suivantes sont bijectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{U}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_2 + 1, \cdots, x_n + n - 1) \end{array}$$

En déduire le résultat.

4.1.3 Balles et paniers

On a r balles et n paniers numérotés de 1 à n.
On répondra aux questions dans les deux cas suivants :
(a) Les r balles sont discernables (par exemple parce qu'elles sont de couleurs différentes).
(b) Les r balles sont indiscernables.

Question 1 : Quel est le nombre de répartitions possibles (un panier peut contenir plusieurs balles) ?
On suppose qu'on a équiprobabilité.
Question 2 : Quelle est la probabilité p_k qu'un panier donné contienne exactement k balles. Étudier la monotonie de la suite $(p_k)_{0\leq k\leq r}$.
Question 3 : On suppose que n et r tendent vers l'infini et que r/n tend vers λ. Montrer que chaque terme p_k admet une limite et calculer celle-ci.

4.2 Chemins et nombre de Catalan, problème du scrutin

4.2.1 Chemins et nombre de Catalan

On considère $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et le réseau passant par les points de coordonnées entières .
On imagine une personne se déplaçant sur ce réseau seulement dans les directions Nord ou Est, c'est à dire que si la personne est au point de coordonnées (x, y), elle va soit en $(x+1, y)$ soit en $(x, y+1)$.

chemin-eps-converted-to.pdf

Voici un exemple de chemin de $(0, 0)$ à $(23, 17)$.
Quel est le nombre de chemins pour aller de $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ à $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$?
On peut voir aussi cette représentation comme la modélisation de l'expérience suivante :
On jette une pièce de monnaie $p+q$ fois. A chaque lancer, on fait un déplacement horizontal si on obtient un pile et un déplacement vertical sinon.
Quel est le nombre de chemins pour aller de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ à $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ où $\mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{p}$ et $\mathbf{0} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{q}$?
Quel est le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui reste en dessous de la diagonale ?
Supposons dans l'interprétation précédente que je gagne 1€ chaque fois que la pièce tombe sur pile et perde 1€ chaque fois qu'elle tombe sur face. La réponse à la question me donne le nombre de possibilités telles que partant avec 0€, ma fortune reste toujours positive.
Pour calculer ce nombre, on va d'abord utiliser le principe de soustraction. Ce nombre est égal au nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) moins le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui traversent la diagonale c'est à dire qui touche la droite d'équation $y = x + 1$.
Le premier est connu, il faut donc calculer le second. Représentons un tel chemin :

chemin3-eps-converted-to.pdf

On considère le premier point où on a touché la droite d'équation $y = x + 1$. Soit A.
Ensuite on prend le symétrique du chemin qui va de A à (n, n) par rapport à la droite d'équation $y = x+1$. On obtient le chemin en pointillé. C'est donc un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(n-1, n+1)$.
Le reste de la trajectoire de $(0, 0)$ à A est inchangé.
Grâce à cette symétrie, on a donc associé à notre chemin de $(0, 0)$ à (n, n) qui touche la droite d'équation $y = x + 1$, un chemin de $(0, 0)$ à $(n - 1, n + 1)$.
En déduire que le nombre cherché est :

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan. Cette astuce de comptage fut trouvée par Désiré André en 1887 et est appelée principe de symétrie.

4.2.2 Problème du scrutin

Lors d'un vote opposant deux candidats A et B, A obtient a voix et B obtient b voix. On suppose que $a < b$. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement, B ait toujours été strictement en tête ?
On pourra représenter le dépouillement par un chemin du plan constitué de segments horizontaux ou verticaux de longueur 1 joignant l'origine au point de coordonnées (a, b) et compter le nombre de chemins situés au dessus de la diagonale.