Analyse réelle

Agrégation interne

Juin 2024

Programme

9 Analyse réelle et complexe
9.1 Nombres réels, nombres complexes
Corps R des nombres réels et C des nombres complexes.
Suites convergentes, divergentes, suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites.
Toute partie non vide majorée de R possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes, théorème des segments emboités. Droite numérique achevée.
Complétude de R : toute suite de Cauchy de R converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de R on peut extraire une sous-suite convergente. Extension de ces résultats à $\mathbb{C}$.
Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.
Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations u = O(v) et u = o(v).
Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes et à coefficients constants, ou par une relation homographique.
9.2 Séries de nombres réels ou complexes
Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
Etude de la convergence par utilisation des relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.
Critère de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.
Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
9.3 Continuité
Fonctions définies sur une partie de R. Limites, continuité à droite, à gauche, continuité.

Relations de comparaison entre fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini : prépondérance, négligeabilité, équivalence. Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrémums. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.
Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass).
9.4 Dérivabilité
Dérivée à droite, à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes.
Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.
Dérivées successives. Fonctions de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit. Composition de fonctions de classe C^k.
Fonctions convexes de classe C^1, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe C^2.
Formules de Taylor avec reste intégrale, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe C^k.
Etude locale des fonctions. Condition nécessaire d'extrémum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.
9.5 Fonctions usuelles
Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Equations fonctionnelles caractérisant ces fonctions parmi les fonctions continues. Fonctions hyperboliques directes et réciproques. Fonctions circulaires directes et réciproques.

VRAI\FAUX

1. La fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}+$.
2. La fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.
3. Une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ et continue est uniformément continue.
4. La fonction f définie par $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}^+$ est uniformément continue.
5. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
6. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre deux en 0, alors f est deux fois dérivable en 0.
7. Une suite positive et qui tend vers 0 décroit à partir d'un certain rang.
8. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite si et seulement si la suite $(\frac{u_1+\cdots+u_n}{n})_{n\geq 1}$ converge.
9. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.

10. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.
11. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ converge.
12. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
13. Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Déterminer lesquelles des assertions suivantes sont toujours vraies.

    (a) $u_n \in A$ à partir d'un certain rang.

    (b) Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

    (c) Tout segment ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.

    (d) Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

    (e) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors toute valeur d'adhérence de (v_n) est dans A.

    (f) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n) et si A est un singleton $\{\ell\}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de (v_n).

    (g) Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Exercices

Exercice 1. On travaille dans cet exercice sur $\mathbb{R}$. L'expression "pour tout $t > 0$" signifiera donc "pour tout réel $t > 0$". Déterminer les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall t > 0, |x| \leq t\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, |x| \leq t\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : \forall t > 0, |x| < t\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, |x| < t\}$

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.
4. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, en notant $A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{Q}} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.
2. Déterminer le sup et l'inf de $x^{1/x}$ pour x parcourant $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, et $\mathbb{N}^*$.
3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}} f' = \sup_{x\neq y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Exercice 4. 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée sur un intervalle ouvert non vide I. En utilisant la borne supérieure M de l'ensemble $f(I)$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in I$ et $\eta > 0$ tels que

$$|h| < \eta \;\Rightarrow\; f(a+h) - f(a) < \epsilon$$

Que peut-on dire si f est minorée sur un intervalle ouvert non vide ?

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété d'addivité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée alors f est continue sur $\mathbb{R}$. De quelle forme est alors f ?

Remarque : Avec l'axiome du choix on peut construire des fonctions additives discontinues.

Exercice 5. (Un théorème de point fixe)
Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante (pas forcément continue).
On considère $\Omega = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que Ω est non vide et qu'il admet une borne supérieure $\omega \in [0,1]$.
2. Montrer que $f(\omega) \geq \omega$.
3. Montrer que $f(\omega) \leq \omega$.
4. En conclure que f admet un point fixe (i.e. il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$).

Exercice 6. On considère les suites $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ de rationnels définies par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!} \; .$$

1. Montrer que $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes et convergent vers e.
2. En utilisant l'encadrement $a_n < e < b_n$, qui est vérifié pour tout n, déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. Montrer l'équivalence entre

1. $(x_n)_{n \geqslant 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. $(x_n)_{n \geqslant 0}$ n'a pas de sous-suite bornée.
3. $|x_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8. limsup, liminf
Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels bornée. Soit pour $n \geq 0$, $X_n = \sup\{x_k,\ k \geq n\}$ et $Y_n = \inf\{x_k,\ k \geq n\}$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ (resp. $(Y_n)_{n \geq 0}$) est décroissante (resp. croissante). En déduire que les deux suites sont convergentes.
   On notera $\limsup x_n$ la limite de $(X_n)_{n \geq 0}$ et $\liminf x_n$ la limite de $(Y_n)_{n \geq 0}$.

2. Que se passe t-il si la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée ? Pas minorée ?
3. Montrer que $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\limsup x_n = \liminf x_n$
5. Montrer que si la borne $\sup_n x_n$ n'est pas atteinte, alors $\limsup x_n = \sup x_n$.
6. Soit m un réel.
   (a) Montrer que si $x_n \leqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup x_n \leqslant m$.
   (b) Montrer que si $\limsup x_n > m$, alors $x_n > m$ pour une infinité de n.
   (c) Montrer que si $\limsup x_n < m$, alors $x_n < m$ à partir d'un certain rang.
7. Montrer que $\limsup x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Que peut-on dire de la limite inférieure ?
8. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure des suites ci-dessous.
   (a) $u_n = (-1)^{n^2}$
   (b) $u_n = \cos(n)$
   (c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   (d) $u_n = \frac{3+n^2+2n}{n(n-\cos n)}$
   (e)
$$u_n = \begin{cases} (-1)^p \ si \ n = 2p \\ \sin(p) \ si \ n = 2p+1 \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $y_n = x_{2n}$ et $z_n = x_{2n+1}$. On note respectivement A, B, C l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$, $(z_n)_{n\geqslant 0}$. Trouver une relation entre A, B et C. En déduire une expression de $\limsup x_n$ en fonction de $\limsup y_n$ et $\limsup z_n$.

Exercice 10. Donner un exemple de suite réelle :

1. sans valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$).
2. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est F, où F est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ fixée.
3. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{N}$.
4. avec une seule valeur d'adhérence, mais divergente.
5. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}$.

1. Soit $m \geqslant 1$ fixé. Montrer que $\limsup u_n^{1/n} \leq u_m^{1/m}$. Indication : utiliser la division euclidienne de n par m.
2. Montrer que la suite $(u_n^{1/n})$ converge vers $\inf_{m\geqslant 1} u_m^{1/m}$.

3. Application : Si A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, montrez que $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{m\geqslant 1}\|A^m\|^{1/m}$.

Exercice 12. Développement en base B
On fixe un entier $B \geqslant 2$. On note E l'ensemble des suites d'entiers à valeurs dans $\{0,\ldots,B-1\}$, indexées par $\mathbb{N}^*$. On note F le sous-ensemble obtenu à partir de E en retirant les suites qui valent $B-1$ à partir d'un certain rang.
Si $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $b=(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de E, on dit que $a<b$ si les suites a et b diffèrent en au moins un indice et si pour l'entier $m=\min\{n\geqslant 1 : a_n \neq b_n\}$, on a $a_m<b_m$. On dit que $a\leqslant b$ si $a<b$ ou $a=b$.

1. Montrer que la relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre total sur E. Cet ordre s'appelle ordre lexicographique.
2. Soit $a=(a_n)_{n\geqslant 1}\in E$. Montrer que la série de terme général a_n/B^n converge et que sa somme, notée $S(a)$ est dans $[0,1]$.
3. Montrer que l'application S ainsi définie de E dans $[0,1]$ est croissante, lorsqu'on munit E de l'ordre lexicographique. Est-elle strictement croissante ?
4. Montrer que la restriction de S à F est strictement croissante.
5. Soit $x\in[0,1[$. Montrer que la suite $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n=[B^nx]-B[B^{n-1}x]$ est dans F et qu'elle vérifie $S(a)=x$. L'écriture
$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{B^n}$$
s'appelle développement en base B du réel x.
6. En déduire que S induit une bijection de F vers $[0,1[$.
7. Soient $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de $[0,1[$ et $x\in[0,1[$.
On note $a_{(n)}=(a_{n,k})_{k\geq 1}$ l'élément de F tel que $S(a_{(n)})=x_n$ et a l'élément de F tel que $S(a)=x$.
Montrer que si pour tout $k\geq 1$, la suite $(a_{n,k})_{n\geq 1}$ tend vers a_k, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tend vers x.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13. (Exemples)

1. Calculer le développement décimal de $13/7$.
2. Calculer $0,454545\cdots+0,565656\cdots$.

Exercice 14. [Points de discontinuité des fonctions monotones]
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, f admet une limite à gauche, notée $f(x-)$, et une limite à droite, notée $f(x+)$.

2. En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, f est continue. Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$.
3. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+) - f(x_i-) \leq f(b) - f(a).$$
4. Montrer que l'ensemble des points de $[a, b]$ où f est discontinue est au plus dénombrable.
5. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$ est dénombrable.

Exercice 15. Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 16. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 17. (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

1. Montrer que de toute suite de réels, on peut extraire une suite monotone.
(On pourra utiliser $H = \{n \in N, \forall m > n, u_m < u_n\}$).
2. En déduire le théorème de Bolzano-Weiestrass : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.
3. En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème de Bolzano- Weiestrass à partir de la propriété des segments emboités.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable. On suppose qu'il existe un polynome P de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$$

Montrer en utilisant Taylor-lagrange que f est nulle.

Exercice 19. Séries

1. Déterminer la nature des séries de terme général donné.
   (a) $u_n = \dfrac{e^n}{n^5 + 1}$
   (b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n n^2}$
   (c) $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4 + \sin n}$
   (d) $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n + 1}$
   (e) $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

(f) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(g) $u_n = ne^{-n}$

(h) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. Déterminer la nature des séries de terme général donné.

(a) $u_n = \dfrac{1 - n\ln(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$,

(b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$,

(c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 1)$,

(d) $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$,

(e) $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$,

(f) $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$,

(g) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geq 2)$,

(h) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha} \quad (n \geq 1)$
(discuter selon la valeur du réel α),

(i). $u_n = n^2 \left(\sin \dfrac{1}{n} + \cos \dfrac{1}{n} + \left(\ln(1 - \dfrac{1}{n})\right)^2 - e^{\frac{1}{n}}\right)$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = 0$ et f'' est bornée.

Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.

Exercice 21. Test de condensation de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.

1. Montrer que les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle démonstration des critères de convergence des séries de Riemann.
3. Étudier la convergence des séries $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}\right)$ et $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}\right)$.

Exercice 22. Équivalence des sommes partielles ou des restes

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites positives. On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k>n} u_k \sim \sum_{k>n} v_k$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On suppose que la série $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 23. 1. **Séries alternées**

Les séries suivantes convergent-elles ?

(a) $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$,

(b) $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,

(c) $\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,

(d) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$,

(e) ** $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n+a^n}$ en fonction de $a\in\mathbb{R}$.

2. **Convergence absolue**
   Les séries suivantes convergent-elles absolument ?

(a) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^3}$,

(b) $\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,

(c) $\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{\cos(n)}{n^2}\right)$,

(d) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

3. Les séries suivantes convergent-elles ?

(a) $\sum_{n\geqslant 1}\cos(n)e^{-3n}$,

(b) $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,

(c) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$,

(d) $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$,

(e) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{n^2+\cos^2 x}\,dx\right)$,

(f) $\sum_{n\geqslant 0}\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}$,

(g) $\sum_{n\geqslant 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$,

(h) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1+(-1)^n n^{\alpha}}{n^{2\alpha}}$,en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$,

(i) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n+a^n}$, en fonction de $a\in\mathbb{C}$.

Exercice 24. 1. On considère la série de terme général $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\ln 2$.

2. On définit pour $n\geq 1$, v_n par : $v_{3p+1}=\frac{1}{2p+1}$, $v_{3p+2}=\frac{?1}{4p+2}$, $v_{3p}=\frac{-1}{4p}$.
   (les termes sont ceux de la série précédente écrits dans un autre ordre).
   Montrer que $\sum_{n\geq 1}v_n$ est convergente de somme $\frac{\ln 2}{2}$.