Suites et séries de fonctions

Préparation à l'agrégation interne

Année 2023

1 Vrai/Faux

1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Si la suite converge simplement sur A vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $]0,1[$ vers une fonction f continue. Alors elle converge uniformément sur $[0,1]$.
3. Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f, alors pour tout x, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers x, $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
4. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :
$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall m \geq n_0\ \forall x \in I\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$
5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0,+\infty[$. On suppose que pour tout $n \geq 1$ f_n admet une limite l_n en $+\infty$. Alors la suite $(l_n)_{n\geq 1}$ admet une limite l et f tend vers l en $+\infty$.
6. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément vers une fonction f sur un intervalle I. Alors f est dérivable sur I.
7. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions telle que la série $\sum u_n$ converge normalement sur un intervalle I. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que
$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in I, \ |f_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad \sum a_n < +\infty$$
8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors $\int_a^b f_n(t)\ dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\ dt$.

2 Convergence simple, convergence uniforme des suites de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $E =]0,+\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$;
2. $E =]0,+\infty[$, $f_n(x) = \inf(n, \ln(x))$;
3. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;
4. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$;
5. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$;
6. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = g(x-n)$ où $g(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ sinon ;

7. $E = [0, 1]$, $f_n(x) = n^2x$ si $x \le 1/n$, $f_n(x) = n - n^2(x - 1/n)$ si $1/n \le x \le 2/n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Exercice 2. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction continue que l'on supposera bornée. A-t-on forcément que $f_n = f(\cdot - \frac{1}{n})$ converge uniformément vers f ? Donner une condition suffisante sur f pour que cela ait lieu.

Exercice 4. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $E \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur E.
2. Si les fonctions f_n et g_n sont bornées, montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément sur E.
3. Montrer que le résultat de la question précédente devient faux sans l'hypothèse de bornitude.

Exercice 5.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose que la suite des dérivées converge uniformément sur $[a, b]$ vers g, et que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour un $x_0 \in [a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $f' = g$.
2. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, mais sans que la suite des dérivées converge vers f'.

Exercice 6. Théorème de Dini
Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n>0}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose :

1. la suite $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers f dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$,
2. la suite $(f_n)_{n>0}$ est monotone, c'est-à-dire ou bien décroissante ou bien croissante.

Montrer que $(f_n)_{n>0}$ converge uniformément vers f.
Donner un contre-exemple dans le cas où l'espace n'est pas compact.

Exercice 7. Application du théorème de Dini

1. On définit une suite $(p_n)_{n>0}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x?p_n(x))^2$. alors les fonctions p_n sont polynomiales et convergent uniformémement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. 2. Montrer que la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

Exercice 8. 1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Montrer que f est un polynôme.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la convergence des polynômes P_n définis par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$?

Exercice 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur l'intérieur de I à valeurs réelles. On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I f(x)dx$ soit absolument convergente. On note $\mathcal{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I f^2(x)dx$ soit convergente.

1. Montrer que $\mathcal{L}^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de E. On définit pour $f \in \mathcal{L}^1(I)$, $\|f\|_1 = \int_I |f(x)|dx$. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(I)$.
2. On suppose que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Est-ce que f_n converge simplement vers f ?
3. On suppose que $(f_n)_n$ est une suite de E qui converge simplement vers f. Est-ce que f_n tend vers f pour la norme $\| \ \|_1$?
4. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$, $fg \in \mathcal{L}^1(I)$. En déduire que $(f, g) \mapsto \int_I f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$.

5. $(\mathcal{L}^2(I), \| \|_2)$ est-il un espace de Hilbert ?
6. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-2x} dx$.
7. Les espaces $\mathcal{L}^1(I)$ et $\mathcal{L}^2(I)$ sont-ils comparables (au sens de l'inclusion) ?
   Sur $\mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$, les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont-elles équivalentes ?

3 Séries de fonctions

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + n^2}$.

Exercice 11. Montrer que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle absolument sur $]0, +\infty[$?
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$? Enoncer le théorème utilisé.
4. Existe-t-il $n_0 \geq 0$ et $a > 0$ tels que la série de fonctions $\sum f_n$, définie pour $n \geq n_0$, converge normalement sur $[a, +\infty[$?
5. Montrer que la fonction $F : x \in]0, +\infty[\mapsto \sum_{n=0}^{=\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Enoncer le théorème utilisé.
6. F admet elle des limites en $+\infty$ et en 0 ? Si oui, calculer les les.
7. Simplifier $F(x) + F(x + 1)$.
8. Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.
9. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 13. Démontrer la règle d'abel uniforme : Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un ensemble E et vérifiant :

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 0, \forall x \in E, |\sum_{k=0}^{n} g_k(x)| \leq M$,
2. La série $\sum |f_n - f_{n+1}|$ converge uniformément sur E,
3. La suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur E,
   alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur E.

Exercice 14. Fonctions zêta
Soit $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition de ζ.
2. Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
3. Pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$.
   Montrer que la série de fonctions $\sum w_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et en déduire que le développement asymptotique de $\zeta(s)$ au voisinnage de 1^+ est donné par

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où γ est la constante d'Euler donnée par $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.