Exercice (4)

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, distribuées selon les lois normales de paramètres (μ_1, σ_1^2) et (μ_2, σ_2^2), respectivement. On pose $T_1 = X_1 - \mu_1$ et $T_2 = X_2 - \mu_2$.
   a) Déterminer les lois de T_1 et de T_2.
   b) Déterminer la loi de $T_1 + T_2$.
   c) En déduire la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire « normal » à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité
$$f_{(X,Y)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+xy+y^2\right)}. \end{array}$$
   a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   b) Déterminer, en utilisant le théorème de changement de variable, une densité du vecteur aléatoire $\big(X, Y + X/2\big)$.
   c) Les variables aléatoires X et $Y + X/2$ sont-elles indépendantes ?

▶ **Corrigé.–**

1. Pour une variable aléatoire à densité Z, on note F_Z sa fonction de répartition, et f_Z une densité de Z.
   a) Pour tout réel x,
   $$F_{T_1}(x) = P(T_1 \leqslant x) = P(X_1 - \mu_1 \leqslant x) = P(X_1 \leqslant \mu_1 + x) = F_{X_1}(\mu_1 + x),$$
   donc par dérivation
   $$f_{T_1}(x) = f_{X_1}(\mu_1 + x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((\mu_1+x)-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}.$$
   On vient donc de démontrer que $T_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$. On montre de même que $T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.
   b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes, il en est de même pour T_1 et T_2, et une densité de $T_1 + T_2$ est donc obtenue par convolution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_{T_1+T_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{T_1}(t) f_{T_2}(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} \times e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}t$$
   $$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}((\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2 - 2\sigma_1^2 xt + \sigma_1^2 x^2)}\,\mathrm{d}t$$
   $$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t^2 - \frac{2\sigma_1^2 xt}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + \frac{\sigma_1^2 x^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\left(t-\frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2-\frac{\sigma_1^4x^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}+\frac{\sigma_1^2x^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t-\frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t-\frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2}}\left(t-\frac{\sigma_1^2x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$, on obtient alors

$$f_{T_1+T_2}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \times \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

ce qui prouve que $T_1+T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

c) On a $X_1+X_2 = T_1+T_2+\mu_1+\mu_2$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F_{X_1+X_2}(x) = P(X_1+X_2 \leqslant x) = P(T_1+T_2 \leqslant x-\mu_1-\mu_2)$$
$$= F_{T_1+T_2}(x-\mu_1-\mu_2),$$

d'où, par dérivation,

$$f_{X_1+X_2}(x) = f_{T_1+T_2}(x-\mu_1-\mu_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

ce qui prouve que $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

2. a) Pour tout réel x,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+xy+y^2\right)}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left((y+\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{4}\right)}\mathrm{d}y = \frac{e^{-\frac{x^2}{8}}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+\frac{x}{2})^2}\mathrm{d}y.$$

En utilisant le changement de variable $u = y + x/2$, on a alors

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{8}}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}},$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,4)$. On a aussi, pour tout réel y,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+xy+y^2\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\left((x+y)^2+y^2\right)}\mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}(x+y)^2}\mathrm{d}x.$$