Chapitre II

Exercices utilisant des probabilités conditionnelles et la notion d'indépendance.

Exercice (1)
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, décomposé sous la forme $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_r}^{\alpha_r}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\Omega = [\![1\,;n]\!] \to$ Oubli de définition !
Pour $d \in \mathbb{N}^*$ qui divise n, on pose :

$$\mathcal{D}_d = \big\{k \in \Omega\,; k\text{est un multiple de } d\big\}.$$

1. Calculer $P(\mathcal{D}_d)$.
2. Montrer que les événements $\mathcal{D}_{p_1},\ \mathcal{D}_{p_2}, \ldots, \mathcal{D}_{p_r}$ sont indépendants.
3. **Indicatrice d'Euler.**
   En déduire que $\varphi(n) = n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$, où :

$$\varphi(n) = Card\Big(\big\{k \in \Omega\,;\ k \wedge n = 1\big\}\Big).$$

▶ **Corrigé.–**

1. On a $\mathcal{D}_d = \{d, 2d, 3d, \dots, \frac{n}{d} \cdot d\}$, d'où :

$$\text{Card}(D_d) = \frac{n}{d} \quad \text{et} \quad P(\mathcal{D}_d) = \frac{\text{Card}(\mathcal{D}_d)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{n/d}{n} = \frac{1}{d}.$$

2. Soient $p_{i_1},\ p_{i_2}, \dots, p_{i_s} \in \{p_1, \dots, p_r\}$ deux à deux distincts. On a :

$$\Big(k \in \bigcap_{k=1}^{s} \mathcal{D}_{p_{i_k}}\Big) \Leftrightarrow \Big(p_{i_1}|k \text{ et } p_{i_2}|k \text{ et } \dots \text{ et } p_{i_s}|k\Big) \Leftrightarrow (p_{i_1} \times p_{i_2} \times \cdots \times p_{i_s}|k)$$

$$\Leftrightarrow \big(k \in \mathcal{D}_{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}\big),$$

d'où : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{D}_{p_{i_k}} = D_{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}$, de sorte que

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{s} \mathcal{D}_{p_{i_k}}\Big) = P(\mathcal{D}_{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}) = \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}} = \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{p_{i_k}} = \prod_{k=1}^{s} P(\mathcal{D}_{p_{i_k}}),$$

donc les événements $\mathcal{D}_{p_1}, \dots, \mathcal{D}_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. Soit l'événement $A = \{k \in \Omega;\ k \wedge n = 1\}$.
Alors $A = \overline{\mathcal{D}_{p_1}} \cap \dots \cap \overline{\mathcal{D}_{p_r}}$, et d'après 2., l'indépendant des événements $\mathcal{D}_{p_1}, \dots, \mathcal{D}_{p_r}$ assure que leurs événements contraire le sont aussi ; par conséquent :

$$P(A) = \prod_{k=1}^{r} P(\overline{\mathcal{D}_{p_k}}) = \prod_{k=1}^{r} (1 - P(\mathcal{D}_{p_k})) = \prod_{k=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

Comme par ailleurs, $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\varphi(n)}{n}$, on en déduit que :

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

Exercice (2)
Le nombre d'appels téléphoniques à un standard entre 14h et 15h, est une variable aléatoire X distribuée selon la loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que pour chaque appel, il y a une probabilité p pour que le correspondant demande un poste donné A. On suppose que les appels sont mutuellement indépendants.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait k appels vers A entre 14h et 15h, sachant qu'il y a en tout n appels au standard ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre d'ap-

pels vers le poste A entre 14h et 15h.

▶ **Corrigé.–**

1. On doit avoir bien sûr, $0 \leqslant k \leqslant n$, car $P_{[X=n]}(Y=k)=0$ si $n<k$.
   Dans le cas où $0 \leqslant k \leqslant n$: sachant $[X=n]$, on est en présence de n épreuves de Bernoulli (le "succès" étant à chaque fois un appel vers A), indépendantes et de même paramètre p. La loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est donc celle du nombre de succès en n épreuves identiques et indépendantes, c'est-à-dire la loi binomiale de paramètres (n,p) :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(Y=k)=\begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k>n \end{cases}$$
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big([Y=k]\cap[X=n]\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y=k)P(X=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}, \end{aligned}$$
   ce qui permet de conclure que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice (3)
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Est-il possible de piper n dés à 6 faces de sorte que la variable aléatoire égale à la somme des résultats des lancers de ces n dés, suive une loi uniforme ?

▶ **Corrigé.–**

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons X_i le résultat donné par le lancer du i-ième dé, et $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On note aussi, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, G_{X_i} la fonction génératrice de X_i, et G_S la fonction génératrice de S.

La variable aléatoire S est à valeurs dans $\{n, n+1, \ldots, 6n\}$, donc si S suit une loi uniforme, alors pour tout réel t :

$$G_S(t)=\frac{1}{5n+1}\sum_{k=n}^{6n} t^k=\frac{1}{5n+1}t^k.\sum_{k=0}^{5n} t^k.$$

On a aussi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et pour tout réel t : $G_{X_i}(t)=\sum_{k=1}^{6} P(X_i= k)t^k$, et comme les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_S(t)=\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.

Or G_S est un polynôme de degré $6n$, et G_{X_i} est, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, un polynôme de degré inférieur ou égal à 6. La dernière égalité de polynômes ci-dessus implique donc que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, G_{X_i} est un polynôme de degré 6, donc que : $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $P(X_i=6) \neq 0$.

Écrivons maintenant : $G_{X_i}(t)=t \cdot P_i(t)$, où $P_i(t)=\sum_{k=1}^{6} P(X_i=k)t^{k-1}$ est l'expression d'un polynôme de degré 5, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

La relation : $G_S(t)=\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$ devient alors :

$$\frac{1}{5n+1}\sum_{k=0}^{5n} t^k=\prod_{i=1}^{n} P_i(t)$$

Or, pour $t \neq 1$: $\sum_{k=0}^{5n} t^k=\frac{t^{5n+1}-1}{t-1}$, donc les racines du polynôme $\sum_{k=0}^{5n} t^k$ sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{5n+1}}$ $(1 \leqslant k \leqslant 5n)$ qui sont des complexes non réels, vu que :

$$(1 \leqslant k \leqslant 5n) \Longrightarrow \left(0<\frac{2\pi}{5n+1} \leqslant \frac{2k\pi}{5n+1} \leqslant \frac{10n\pi}{5n+1}<2\pi\right)$$

Or, P_1 par exemple est un polynôme de degré 5 à coefficients réels : il admet donc au moins une racine réelle, qui serait donc aussi racine de $\sum_{k=0}^{5n} t^k$ d'après la relation précédemment obtenu.

C'est impossible, et par l'absurde on a démontré qu'il est impossible de piper n dés à 6 faces pour que leur somme soit une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

Exercice (4). Lois Gamma, bêta et du χ^2

▶ Soient a et λ deux réels strictement positifs. On appelle **loi Gamma** de paramètres (a,λ) et l'on note $\gamma(a,\lambda)$ la loi dont une densité est

$$f_{(a,\lambda)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \qquad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a)} e^{-\lambda t}\lambda^a t^{a-1}, & \text{si } t>0,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

où $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t$.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes respectivement distribuées selon les lois $\gamma(a,\lambda)$ et $\gamma(b,\lambda)$.
   Déterminer la loi de $S = X+Y$ et en déduire que :
   $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \text{où } B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t.$$
2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   On pose $K_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.
   Montrer par récurrence sur n, que K_n suit la loi $\chi_n^2 = \gamma(n/2, 1/2)$.

▶ **Corrigé.**–

1. La variable aléatoire $S = X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et en notant f_X, f_Y et f_S les densités respectives de X, Y et S, alors puisque X et Y sont indépendantes on a pour tout $x>0$:
   $$\begin{aligned} f_S(x) = f_{X+Y}(x) = f_X \star f_Y(x) &= \int_0^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x e^{-\lambda(x-t)}\lambda^a(x-t)^{a-1}e^{-\lambda t}\lambda^b t^{b-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\lambda x}\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x (x-t)^{a-1}t^{b-1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
   En utilisant le changement de variable $t = xu$, on obtient pour tout

$x > 0$:

$$f_S(x) = \frac{e^{-\lambda x}\lambda^{a+b}x^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-u)^{a-1}u^{b-1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x}\lambda^{a+b}x^{a+b-1},$$

d'où :

$$1 = \int_0^{+\infty} f_S(x)\mathrm{d}x = \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\lambda^{a+b}x^{a+b-1}\mathrm{d}x = \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\Gamma(a+b),$$

d'où : $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$,

et de plus, $f_S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda x}\lambda^{a+b}x^{a+b-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, donc S suit la loi Gamma de paramètres $(a+b, \lambda)$.

2. On procède donc par récurrence sur le nombre n de variables aléatoires concernées.

Initialisation. Soit $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire suivant la loi normale. En notant, pour toute variable aléatoire à densité Z, F_Z sa fonction de répartition et f_Z une densité, alors on peut écrire, pour tout $t > 0$,

$$F_{X_1^2}(t) = \mathbb{P}(X_1^2 \leqslant t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{t}) = 2F_{X_1}(\sqrt{t}) - 1,$$

d'où

$$f_{X_1^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{X_1}(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}}.$$

Ainsi,

$$f_{X_1^2}(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}t} \times t^{-\frac{1}{2}}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc $X_1^2 \hookrightarrow \gamma(1, 1/2)$.

Hérédité. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, identiquement distribuées selon la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par hypothèse de récurrence, $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \hookrightarrow \gamma(n, 1/2)$ et puisque l'on sait que $X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma(1, 1/2)$, alors d'après 1.c),

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 + X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma\left(n+1, \frac{1}{2}\right).$$

Exercice (5)Loi de Student Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et distribuées respectivement selon les lois $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$.

On pose $S_n = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$, et on admet que S_n est une variable à densité.

On note f_{S_n} une densité de S_n.

1. a) Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{\sqrt{y/n}}, y\right) \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et déterminer φ^{-1}.

   b) Montrer que pour tout réel x :

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

   Cette densité définit la loi de Student à n degrés de liberté, notée $t(n)$.

2. Reconnaître la loi $t(1)$, et en déduire que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
3. Montrer que la loi $t(n)$ admet un moment d'ordre r si et seulement si $r < n$.
4. Calculer $E(S_n)$ pour $n \geqslant 2$, et $V(S_n)$ pour $n \geqslant 3$.

▶ **Corrigé.**–

Chapitre XX

Exercices faisant intervenir des variables aléatoires

Exercice (1). Formule d'Euler

Soit $s > 1$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre s. La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \times \frac{1}{n^s}, \quad \text{où } \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

On note $\{n \mid X\}$ l'événement « n divise X », et $\{n \nmid X\}$ l'événement contraire.

1. Calculer $\mathbb{P}(\{n \mid X\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux. Montrer que les événements
$$\{n_1 \mid X\},\ \{n_2 \mid X\}, \ldots, \{n_k \mid X\}, \ldots$$
sont mutuellement indépendants.
3. Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres premiers, et soit r entier naturel non nul. Montrer que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\Big) = \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i^{-s}).$$
4. En déduire que $\quad 1/\zeta(s) = \lim\limits_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s})$.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\{n \mid X\} = \{X \in n\mathbb{N}^*\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{X = kn\}$. Il s'agit d'une réunion dénombrable d'événements deux à deux disjoints, donc

$$\mathbb{P}(\{n \mid X\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = kn) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(z)} \times \frac{1}{(kn)^s}$$
$$= \frac{1}{\zeta(s)} \times \frac{1}{n^s}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^s}\Big) = \frac{1}{\zeta(z)} \times \frac{1}{n^s}\zeta(z) = \frac{1}{n^s}.$$

2. Soient $i_1, i_2, \dots, i_m$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts ; on peut écrire

$$\Big(\omega \in \bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} \{n_{i_k} \mid X\}\Big) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, 2, \dots, m\},\ n_{i_k} \mid X(\omega))$$
$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{m} n_{i_k} \mid X(\omega), \quad \text{car } n_{i_1}, \dots, n_{i_m} \text{ sont deux à deux premiers entre eux,}$$
$$\Leftrightarrow w \in \Big\{\prod_{k=1}^{m} n_{i_k} \mid X\Big\},$$

d'où l'égalité d'événements $\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m}\{n_{i_k} \mid X\} = \big\{\prod_{k=1}^{m} n_{i_k} \mid X\big\}$, de sorte que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant m} \{n_{i_k} \mid X\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\prod_{k=1}^{m} n_{i_k} \mid X\Big) \stackrel{1}{=} \frac{1}{\big(\prod_{k=1}^{m} n_{i_k}\big)^s}$$
$$= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_{i_k})^s} = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(n_{i_k} \mid X),$$

ce qui prouve bien que les événements $\{n_1 \mid X\}$, $\{n_2 \mid X\}, \dots, \{n_k \mid X\}, \dots$ sont mutuellement indépendants.

3. D'après la question 2, les événements $\{p_i \mid X\}$, $i \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendants, donc leurs événements contraires $\{p_i \nmid X\}$, $i \in \mathbb{N}^*$, le sont aussi, de sorte que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{r}\{p_i \nmid X\}\Big) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\{p_i \nmid X\}) = \prod_{i=1}^{r}\big(1 - \mathbb{P}(p_i \nmid X)\big) \stackrel{1}{=} \prod_{i=1}^{r}\Big(1 - \frac{1}{p_i{}^s}\Big).$$

4. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $A_r = \bigcap_{i=1}^{r}\{p_i \nmid X\}$. La suite $(A_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion ; en effet ,

$$A_{r+1} = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant r+1}\{p_i \nmid X\} = \Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_i \nmid X\}\Big) \bigcap \{p_{r+1} \nmid X\} \subset \bigcap_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_i \nmid X\} = A_r.$$

Par ailleurs, $\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} A_r = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \{p_i \nmid X\}$, donc

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} p_i \nmid X\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} A_r\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n), \qquad \text{par limite monotone,}$$

$$\overset{3}{=} \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{{p_i}^s}\Big) = \prod_{i=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{{p_i}^s}\Big).$$

Enfin, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \{p_i \nmid X\} = \{X = 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/\zeta(s)$, d'où

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{{p_i}^s}\Big).$$

Exercice (2)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
2. a) Soient S et T deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, discrètes finies à valeurs réelles, et mutuellement indépendantes.

   On suppose que T et $-T$ suivent la même loi, montrer que

   $$\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbb{E}\big(\cos(S)\big) \times \mathbb{E}\big(\cos(T)\big).$$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\mathbb{E}\big(\cos(tS_n)\big) = \big(\cos(t)\big)^n.$$

3. a) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$.

   Prouver que $|a+b| = |a| + \big(\text{signe}(a)\big)\, b$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(|S_{2n-1}|) = \mathbb{E}(|S_{2n}|)$.

4. a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt$ est convergente.

   b) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

   Montrer que $\quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt = |s| \times \frac{\pi}{2}$.

   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \big(\cos(t)\big)^n}{t^2}\, dt.$$

▶ **Corrigé.**–

1. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont finies, donc admettent une espérance et une variance communes.

$$\mathbb{E}(X_1) = -1 \times \mathbb{P}(X_1 = -1) + 1 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert,

$$\mathbb{V}(X_1)=\mathbb{E}(X_1^2)+\big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2=(-1)^2\times\mathbb{P}(X_1=-1)+1^2\times\mathbb{P}(X_1=1)=1.$$

La variable aléatoire S_n est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui admettent chacune une espérance et une variance finies, et S_n admet donc elle-même une espérance et une variance, qui valent respectivement

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)=n.$$

2. a) Puisque S et T sont des variables aléatoires finies, la variable aléatoire $\cos(S+T)$ admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big)&=\mathbb{E}\big(\cos(S)\cos(T)-\sin(S)\sin(T)\big)\\&=\mathbb{E}\big(\cos(S)\big)\times\mathbb{E}\big(\cos(T)\big)-\mathbb{E}\big(\sin(S)\big)\times\mathbb{E}\big(\sin(T)\big),\end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance, et d'après le lemme des coalitions qui assure que puisque S et T sont indépendantes, alors $\cos(S)$ et $\cos(T)$ le sont aussi, de même que $\sin(S)$ et $\sin(T)$.

De plus, puisque T et $-T$ suivent la même loi, alors

$$\mathbb{E}\big(\sin(T)\big)=\mathbb{E}\big(\sin(-T)\big)=-\mathbb{E}\big(\sin(T)\big),$$

par imparité de la fonction sinus, et linéarité de l'espérance.
On en déduit que $\mathbb{E}\big(\sin(T)\big)=0$, et donc

$$\mathbb{E}\big(\cos(S+T)\big)=\mathbb{E}\big(\cos(S)\big)\times\mathbb{E}\big(\cos(T)\big).$$

b) On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Hypothèse de récurrence.– $\mathbb{E}\big(\cos(tS_n)\big)=\big(\cos(t)\big)^n$, $n\geqslant 1$ fixé.

Initialisation.– Pour $n=1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\cos(tS_1)\big)=\mathbb{E}\big(\cos(tX_1)\big)&=\cos(-t)\mathbb{P}(X_1=-1)+\cos(t)\mathbb{P}(X_1=1)\\&=\frac{1}{2}\cos(-t)+\frac{1}{2}\cos(t)=\cos(t).\end{aligned}$$

Hérédité.– En supposant l'hypothèse au rang n, alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\cos(tS_{n+1})\big)=\mathbb{E}\big(\cos(tS_n+tX_{n+1})\big)&\overset{1}{=}\mathbb{E}\big(\cos(tS_n)\big)\mathbb{E}\big(\cos(tX_{n+1})\big)\\&=\big(\cos(t)\big)^n\cos(t)=\big(\cos(t)\big)^{n+1}.\end{aligned}$$

Les variables aléatoires tS_n et tX_{n+1} sont en effet indépendantes d'après le lemme des coalitions.

3. a) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$. Alors,

$$|a+b| = |a| \times |1+\frac{b}{a}| = |a|(1+\frac{b}{a}) = |a|(1+\text{signe}(a)\frac{b}{|a|}) = |a| + \text{signe}(a)b.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_{2n}|) &= \mathbb{E}(|S_{2n-1}+X_{2n}|), \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_{2n-1}| \geqslant 1 = |X_{2n}| \\ &= \mathbb{E}\big(|S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}\big) \\ &= \mathbb{E}(|S_{2n}|) + \text{signe}(S_{2n-1})\underbrace{\mathbb{E}(X_{2n})}_{=0} \\ &= \mathbb{E}(|S_{2n-1}|).\end{aligned}$$

4. a) La fonction $g : t \mapsto \big(1-\cos(t)\big)/t^2$ est continue sur $]0,+\infty[$, et est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 1/2$. Au voisinage de l'infini, $g(t) = O(1/t^2)$. La convergence de l'intégrale en découle.

b) Avec le changement de variable $u = |s|t$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}|s|^2\frac{\mathrm{d}u}{|s|} \\ &= |s|\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u = |s|\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^n}{t^2}\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbb{E}\big(\cos(tS_n)\big)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{k\in S_n(\Omega)} \frac{1-\cos(kt)}{t^2}\mathbb{P}(S_n=k)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k\in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(S_n=k)\times\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(kt)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k\in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(S_n=k)\times\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}|k| \\ &= \sum_{k\in S_n(\Omega)} |k|\mathbb{P}(S_n=k) = \mathbb{E}(|S_{2n}|).\end{aligned}$$

Exercice (3). Théorème d'approximation de Weierstrass

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0\,;1]$ et $f:\ [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre x. On note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad Z_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad B_n(f)(x) = \mathbb{E}\big(f(S_n)\big).$$

1. Quelle est la loi de S_n ? Déterminer l'espérance et la variance de S_n en fonction de n et de x.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$,
$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |\frac{k}{n} - \alpha| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$,
$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \big(f\big(\tfrac{k}{n}\big) - f(x)\big).$$
En déduire que la suite $\big(B_n(f)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

▶ **Corrigé.–**

1. La variable aléatoire S_n est à valeurs dans $S_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, et pour tout $k \in S_n(\Omega)$,
$$\{S_n = k\} = \bigcup_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in A_k} \{X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n\},$$
où $A_k = \big\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0\,;1\}^n \mid \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = k\big\}$.
On sait que l'ensemble A_k contient $\binom{n}{k}$ éléments, donc $\{S_n = k\}$ est la réunion de $\binom{n}{k}$ événements deux à deux incompatibles ; on en déduit
$$\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in A_k} \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n) = \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in A_k} \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i)\Big).$$
Or, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = x$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$, et l'on peut donc toujours écrire $\mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i) = x^{\varepsilon_i}(1-x)^{1-\varepsilon_i}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n=k) &= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in A_k} \prod_{i=1}^{n} x^{\varepsilon_i}(1-x)^{1-\varepsilon_i} = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in A_k} x^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}(1-x)^{n-\varepsilon_1-\cdots-\varepsilon_n}\\ &= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in A_k} x^k(1-x)^{n-k} = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\mathbb{E}(X_i) = x$ et $\mathbb{V}(X_i) = x(1-x)$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = nx$ et puisque les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = nx(1-x).$$

2. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \mathbb{P}(S_n = k)\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \mathbb{P}\big(Z_n = \tfrac{k}{n}\big) = \mathbb{P}(|Z_n - x| > \alpha)\\ &= \mathbb{P}\big(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \alpha\big), \qquad (1)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\alpha^2}, \qquad (2)\end{aligned}$$

l'égalité du niveau (1) se justifiant par le fait $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(S_n)/n = x$, et celle au niveau (2) résultant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Or, $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(S_n/n) = \mathbb{V}(S_n)/n^2 = x(1-x)/n$, d'où

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Enfin, la fonction $g : [0\,;1] \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x(1-x)$, qui admet pour dérivée $g' : x \mapsto 1-2x$, est croissante sur $[0\,;1/2]$ et décroissante sur $[1/2\,;1]$; elle admet donc un maximum en $x = 1/2$ qui vaut $g(1/2) = 1/4$, et donc

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. Le théorème de transfert donne, pour la variable aléatoire finie Z_n,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(Z_n)) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-)x^{n-k}.\end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$, alors on peut écrire, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\begin{aligned}B_n(f)(x) - f(x) &= \mathbb{E}(f(Z_n)) - f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant& \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}} \left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &+\left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\leqslant\alpha}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\ \leqslant& 2\|f\|_\infty \times \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|>\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\leqslant\alpha}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ \leqslant& 2\|f\|_\infty\frac{1}{4n\alpha^2} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\leqslant\alpha}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur le segment $[0\,;1]$, et y est donc uniformément continue, si bien que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2,\quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et en incorporant ce α dans le calcul précédent, on obtient

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\leqslant\alpha}}\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\leqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme par ailleurs, $\|f\|_\infty/(2n\alpha^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe donc aussi $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $\|f\|_\infty/(2n\alpha^2) < \varepsilon/2$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. On démontre ainsi que

$$||B_n(f) - f||_{\infty,[0\,;1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et la suite de fonctions polynomiales $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dès lors uniformément sur $[0\,;1]$ vers f.

Exercice (4). Chaînes de Markov

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov discrète**, dont l'espace d'états est $E=\{1,2,\ldots,n\}$, s'il existe une matrice $P=(p_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (appelée *matrice de transition de la chaîne*) telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, et pour tous $1\leqslant i,j\leqslant n$,

$$p_{i,j}=\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=j).$$

On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$U_k=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_k=1) & \mathbb{P}(X_k=2) & \cdots & \mathbb{P}(X_k=n)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ U_{k+1}=U_kP$, et en déduire que $U_k=U_0P^k$.
2. On dit qu'une matrice $Q=(q_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est **stochastique** si pour tout $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n}q_{i,j}=1$.
   Si de plus tous les coefficients $q_{i,j}$ sont strictement positifs, alors on dit que Q est *strictement* stochastique.
   Montrer que $Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est stochastique si, et seulement si, $Q\mathbf{1}=\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire que le produit de deux matrices stochastiques (resp. strictement stochastiques) est une matrice stochastique (resp. strictement stochastique)
3. Montrer que la matrice P est stochastique.
4. On suppose que la matrice P est strictement stochastique.
   Soit $m=\min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_{i,j}$; en posant $P^k=(p_{i,j}^{(k)})$, on note pour tout $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $m_j^{(k)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}p_{i,j}^{(k)}$ et $M_j^{(k)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}p_{i,j}^{(k)}$.
   a) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,
   $$m_j^{(k+1)}-m_j^{(k)}\geqslant m\big(M_j^{(k)}-m_j^{(k)}\big)$$
   $$\text{et}\quad M_j^{(k)}-M_j^{(k+1)}\geqslant m\big(M_j^{(k)}-m_j^{(k)}\big).$$
   En déduire que les suites $(m_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ; on note π_j leur limite commune.
   b) Établir alors que $P^k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\begin{pmatrix}\Pi\\ \vdots\\ \Pi\end{pmatrix}$, où $\Pi=\begin{pmatrix}\pi_1 & \cdots & \pi_n\end{pmatrix}$.
   c) En déduire que $U_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Pi$, puis que $\mathbb{P}(X_k=j)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\pi_j$ pour tout $(1\leqslant j\leqslant n)$.

5. a) Montrer que $\mathrm{Ker}({}^{t}P - I) = \mathrm{Vect}({}^{t}\Pi)$.
   b) Montrer que les résultats des questions 2.b), c) et d) restent vrais si l'on remplace l'hypothèse : « P est strictement stochastique » par l'hypothèse : « il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que P^r est strictement stochastique ».

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la formule des probabilités totales donne
$$\mathbb{P}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_k = i]}(X_{k+1} = j) \times \mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\mathbb{P}(X_k = i),$$
de sorte que
$$U_kP = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_k = 1) & \cdots & \mathbb{P}(X_k = n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}\mathbb{P}(X_k = i) \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} p_{i,n}\mathbb{P}(X_k = n)\right) = U_{k+1},$$
et ainsi,
$$U_k = U_{k-1}P = U_{k-2}P^2 = \cdots = U_0P^k.$$

2. Rappelons que d'un point de vue matriciel,
$$\left(Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+) \text{ est stochastique}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} q_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} q_{n,j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow Q\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$
Ainsi, si Q et R sont deux matrices stochastiques (resp. strictement stochastiques), et si $\mathrm{S} = \mathrm{RQ}$ est leur produit, alors
   ▷ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $s_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} r_{i,\ell}q_{\ell,j} \geqslant 0$ (resp $s_{i,j} > 0$) ;
   ▷ de plus, $S\mathbf{1} = \mathrm{R}Q\mathbf{1} = R\mathbf{1} = \mathbf{1}$,

ce qui prouve que $S = RQ$ est stochastique (resp. strictement stochastique).

3. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_0 = i]}(X_1 = j) \geqslant 0$, et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_0 = 0]}(X_1 = j) = 1$, donc la matrice P est stochastique.

4. On suppose que P est strictement stochastique.

   a) Nous suivons les notations introduites par l'énoncé.
   Soient $q, r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $M_j^{(k)} = p_{qj}^{(k)}$ et $m_j^{(k+1)} = p_{rj}^{(k+1)}$; on a

$$\begin{aligned}
m_j^{k+1} - m_j^{(k)} &= p_{rj}^{(k+1)} - m_j^{(k)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} p_{r\ell} p_{\ell j}^{(k)} - m_j^{(k)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} p_{r\ell}\big(p_{\ell j}^{(k)} - m_j^{(k)}\big), \quad \text{car } \sum_{\ell=1}^{n} p_{r\ell} = 1, \\
&\geqslant m \sum_{\ell=1}^{n} \big(p_{\ell j}^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \\
&\geqslant m\big(p_{qj}^{(k)} - m_j^{(k)}\big) = m\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big).
\end{aligned}$$

   Soient aussi $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $M_j^{(k+1)} = p_{sj}^{(k+1)}$ et $m_j^{(k)} = p_{tj}^{(k)}$; on a

$$\begin{aligned}
M_j^{(k)} - M_j^{(k+1)} &= M_j^{(k)} - p_{sj}^{(k+1)} \\
&= M_j^{(k)} - \sum_{\ell=1}^{n} p_{s\ell} p_{\ell j}^{(k)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} p_{s\ell}\big(M_j^{(k)} - p_{\ell j}^{(k)}\big) \\
&\geqslant m \sum_{\ell=1}^{n} \big(M_j^{(k)} - p_{\ell j}^{(k)}\big) \\
&\geqslant m\big(M_j^{(k)} - p_{tj}^{(k)}\big) = m\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big).
\end{aligned}$$

   Alors,

$$\begin{aligned}
M_j^{(k+1)} - m_j^{(k+1)} &= M_j^{(k+1)} - M_j^{(k)} + M_j^{(k)} - m_j^{(k)} + m_j^{(k)} - m_j^{(k+1)} \\
&\leqslant -m\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) + M_j^{(k)} - m_j^{(k)} - m\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \\
&\leqslant (1 - 2m)\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big).
\end{aligned}$$

   On en déduit, via une récurrence facile, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leqslant (1 - 2m)^{k-1}\big(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\big) \leqslant (1 - 2m)^{k-1}(M - m),$$

   où $M = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j}$. Mais, $0 \leqslant m \leqslant 1/2$, car $n \geqslant 2$, alors on obtient que $M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Les deux suites $(m_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(M_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers une limite commune, notée π_j.

b) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $m_j^{(k)} \leqslant p_{i,j}^{(k)} \leqslant M_j^{(k)}$, alors par encadrement, $p_{i,j}^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \pi_j$.

c) Au vu de ce qui précède, $P^k = \left(p_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$.

Donc,

$$\begin{aligned} U_k = U_0 P^k &= \left(\mathbb{P}(X_0 = 1) \quad \cdots \quad \mathbb{P}(X_0 = n)\right) \left(p_{i,j}^{(k)}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}^{(k)} \mathbb{P}(X_0 = i) \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} p_{i,n} \mathbb{P}(X_0 = i)\right) \\ &\xrightarrow[k \to +\infty]{} \left(\pi_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_0 = i) \quad \cdots \quad \pi_n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_0 = i)\right) \\ &\qquad = \left(\pi_1 \quad \cdots \quad \pi_n\right) = \Pi. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad \mathbb{P}(X_k = j) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \pi_j$.

5. a) On sait que $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, donc $\mathbf{1} \in \operatorname{Ker}(P - I)$, et $\operatorname{Ker}(P - I) \neq \{0\}$. Soit maintenant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(P - I) \setminus \{0\}$, et soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $|x_j| = \max_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |x_\ell|$. On a alors $x_j \neq 0$, et quitte prendre $-X$ au lieu de X, on peut supposer $x_j > 0$.
Or, $PX = X$, donc $\sum_{\ell=1}^{n} p_{j,\ell} x_\ell = x_j \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{n} p_{j,\ell}(x_j - x_\ell) = 0$, dans cette somme nulle, $p_{j,\ell} > 0$ et $x_j - x_\ell \geqslant 0$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Par conséquent, $x_\ell = x_j$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ce qui signifie que $X = x_j \times \mathbf{1}$, et démontre que

$$\operatorname{Ker}(P - I) = \operatorname{Vect}(\mathbf{1}).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}({}^{t}P - I) &= n - \operatorname{rg}({}^{t}P - I), \qquad \text{(théorème du rang)} \\ &= n - \operatorname{rg}\left({}^{t}(P - I)\right) = n - \operatorname{rg}(P - I) \\ &= \dim \operatorname{Ker}(P - I) = 1. \end{aligned}$$

Or, d'après c), $U_{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \Pi$ et $U_{k+1} = U_k P \xrightarrow[k \to +\infty]{} \Pi P$, donc par unicité de la limite, $\Pi = \Pi P$, et dès lors ${}^{t}P\,{}^{t}\Pi = {}^{t}\Pi$.
Ainsi, ${}^{t}\Pi \in \operatorname{Ker}({}^{t}P - I) \setminus \{0\}$, et comme $\dim \operatorname{Ker}({}^{t}P - I) = 1$, on en déduit que $\operatorname{Ker}({}^{t}P - I) = \operatorname{Vect}(\Pi)$.

b) Avec la nouvelle hypothèse faite dans cette question, P^r est strictement stochastique, donc d'après la question 4.d) il existe $\Pi \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Ker}\left({}^{t}(P^r) - I\right) = \operatorname{Vect}({}^{t}\Pi)$, donc $\dim \operatorname{Ker}\left({}^{t}(P^r) - I\right) = 1$. Par ailleurs, $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, donc 1 est valeur propre de P, et donc $\det(P - I) = 0$.

On en déduit que $\det({}^tP-I)=\det\left({}^t(P-I)\right)=\det(P-I)=0$, donc 1 est valeur propre de ${}^tP$, donc $\operatorname{Ker}({}^tP-I)\neq\{0\}$ et $\dim\operatorname{Ker}({}^tP-I)\geqslant 1$. Or, on a $\operatorname{Ker}({}^tP-I)\subset\operatorname{Ker}\left({}^t(P^r)-I\right)$, car si $X\in\operatorname{Ker}({}^tP-I)$, si bien que ${}^tPX=X$, et de proche en proche,

$$X={}^tPX={}^tP({}^tPX)=({}^tP)^2X=\cdots=({}^tP)^rX.$$

Puisque $({}^tP)^r={}^t(P^r)$, il vient $X={}^t(P^r)X$, et donc $X\in\operatorname{Ker}\left({}^t(P^r)-I\right)$. Ainsi, $1\leqslant\dim\operatorname{Ker}({}^tP-I)\leqslant\dim\operatorname{Ker}\left({}^t(P^r)-I\right)\leqslant 1$, d'où

$$\operatorname{Ker}({}^tP-I)=\operatorname{Ker}\left({}^t(P^r)-I\right)=\operatorname{Vect}({}^t\Pi),\quad\text{et}\quad {}^tP\,{}^t\Pi={}^t\Pi\ \Leftrightarrow\ \Pi P=\Pi.$$

Il nous reste à montrer que $U_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Pi$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, la division euclidienne de k par r assure l'existence (et l'unicité) de deux entiers q, s tels que $k=qr+s$. On a alors $U_0P^k=U_0P^{qr+s}=U_0(P^r)^qP^s$. Or, d'après la question 4.c), $U_0(P^r)^q\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Pi$, et parce que $\Pi=\Pi P$, on a alors $\Pi=\Pi P=\Pi P^2=\cdots=\Pi P^s$, de sorte que

$$U_0P^k=U_0P^{qr+s}\xrightarrow[q\to+\infty]{}\Pi P^s=\Pi,\qquad\text{donc } U_k=U_0P^k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Pi.$$

Exemple. Considérons $P=\begin{pmatrix}0&3/4&1/4\\3/4&0&1/4\\0&1&0\end{pmatrix}$. La matrice P est stochastique, mais pas strictement stochastique. On vérifiera que la matrice P^4 est strictement stochastique, et donc que $U_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Pi$, où $\operatorname{Ker}({}^tP-I)=\operatorname{Vect}({}^t\Pi)$.

Un calcul facile permet de vérifier que $\operatorname{Ker}({}^tP-I)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}12\\16\\7\end{pmatrix}\right)$, donc il existe $\lambda>0$ tel que ${}^t\Pi=\lambda\begin{pmatrix}12\\16\\7\end{pmatrix}$. Comme on veut que la somme des composantes de Π soit égale à 1, alors $\lambda=1/35$ et

$$\left(\mathbb{P}(X_k=1)\quad\mathbb{P}(X_k=2)\quad\mathbb{P}(X_k=3)\right)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\left(\frac{12}{35}\quad\frac{16}{35}\quad\frac{7}{35}\right).$$

Exercice (5). Lois Gamma, bêta et du χ^2

▶ Soient a et λ deux réels strictement positifs. On appelle **loi Gamma** de paramètres (a,λ) et l'on note $\gamma(a,\lambda)$ la loi dont une densité est

$$f_{(a,\lambda)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a)} e^{-\lambda t}\lambda^a t^{a-1}, & \text{si } t>0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \end{array},$$

où $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} \mathrm{d}t$.

▶ Soient a et b deux réels de $]0\,;1[$. On appelle **loi bêta** de paramètres (a,b), la loi dont une densité est

$$g_{(a,b)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t, & \text{si } t \in]0\,;1[, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \end{array},$$

où $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires respectivement distribuées selon les lois $\gamma(a,\lambda)$ et $\gamma(b,\lambda)$. On pose $S = X+Y$ et $T = X/(X+Y)$.

   a) Montrer que l'application
   $$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \times]0\,;1[\\ (x,y) & \mapsto & \left(x+y, \dfrac{x}{x+y}\right) \end{array}$$
   est un C^1-difféomorphisme, et calculer φ^{-1}.

   b) Déterminer la loi du couple (S,T)

   c) En déduire que S et T sont indépendantes, que S suit la loi $\gamma(a+b,\lambda)$, que T suit la loi bêta de paramètres (a,b) et que
   $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0\,,1)$.
   On pose $K_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.
   Montrer par récurrence sur n, que K_n suit la loi $\chi_n^2 = \gamma(n/2\,,1/2)$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Soit $(s,t)\in\mathbb{R}_+^*\times]0\,;1[$, on a

$$\big(\varphi(x,y)=(s,t)\big) \Leftrightarrow \Big(\big(x+y,\frac{x}{x+y}\big)=(s,t)\Big) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & =t\\ \dfrac{x}{x+y} & =t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=st\\ y=s-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=st\\ y=s(1-t)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=\big(st,s(1-t)\big).$$

Ainsi, (s,t) possède un unique antécédent par φ dans $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que φ est bijective, avec

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}:\ \mathbb{R}_+^*\times]0\,;1[&\to \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\\ (s,t)&\mapsto \big(st,s(1-t)\big).\end{aligned}$$

Il est par ailleurs évident, que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*\times]0\,;1[$.

b) On a $\det\big(J_{\varphi^{-1}}(s,t)\big)=\begin{vmatrix} t & s\\ 1-t & -s\end{vmatrix}=-s$, et en notant $f_{(X,Y)}$ et $f_{(S,T)}$ les densités respectives des couples (X,Y) et (S,T). On a

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y),$$

puisque X et Y sont indépendantes. Le théorème de changement de variable donne alors

$$f_{(S,T)}(s,t)=f_{(X,Y)}\big(\varphi^{-1}(s,t)\big)\times|\det J_{\varphi^{-1}}(s,t)|,$$

et l'on a donc pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}_+^*\times]0\,;1[$,

$$\begin{aligned} f_{(S,T)}(s,t)&=f_X(st)\times f_Y\big(s(1-t)\big)\times s\\ &=\frac{e^{-\lambda st}\lambda^a(st)^{a-1}}{\Gamma(a)}\times\frac{e^{-\lambda s(1-t)}\lambda^b\big(s(1-t)\big)^{b-1}}{\Gamma(b)}\times s\\ &=\frac{e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)},\end{aligned}$$

soit $f_{(S,T)}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}t^{a-1}(1-t)^{b-1}, & \text{si } (s,t)\in\mathbb{R}_+^*\times]0\,;1[\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$

c) Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_S(s)=\int_{]0\,;1[}f_{(S,T)}(s,t)\mathrm{d}t&=\frac{e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t\\ &=\frac{e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}B(a,b).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_S(s) = \begin{cases} \dfrac{B(a,b)}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)} e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}, & \text{si } s > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}} f_S(s)\mathrm{d}s &= \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}\mathrm{d}s \\ &= \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}\Gamma(a+b), \end{aligned}$$

de sorte que

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\times\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{et} \quad f_S(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}, & \text{si } s>0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela prouve que la variable aléatoire S suit la loi $\gamma(a+b,\lambda)$. On a aussi, pour tout $t \in]0\,;1[$,

$$\begin{aligned} f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{(S,T)}(s,t)\mathrm{d}s &= \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\lambda^{a+b}s^{a+b-1}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}, & \text{si } t \in]0\,;1[, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la variable aléatoire T est donc distribuée selon la loi bêta de paramètres (a,b).

Enfin, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0\,;1[$,

$$\begin{aligned} f_{(S,T)}(s,t) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\times\Gamma(b)} e^{-\lambda s}s^{a+b-1}t^{a-1}(1-t)^{b-1} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda s}s^{a+b-1} \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} = f_S(s)\times f_T(t), \end{aligned}$$

si bien que les variables aléatoires S et T sont indépendantes.

2. On procède donc par récurrence sur le nombre n de variables aléatoires concernées.

   Initialisation. Soit $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire suivant la loi normale. En notant, pour toute variable aléatoire à densité Z, F_Z sa fonction de répartition et f_Z une densité, alors on peut écrire, pour tout $t > 0$,

$$F_{X_1^2}(t) = \mathbb{P}(X_1^2 \leqslant t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{t}) = 2F_{X_1}(\sqrt{t}) - 1,$$