Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue (Leçon 421)

Exercice (1). Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\cos^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta$

Soit la fonction $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln\left(1+\cos^2(\theta)\right) \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$g'(\theta) = 2\mathrm{i}\cdot\frac{e^{4\mathrm{i}\theta}-1}{e^{4\mathrm{i}\theta}+6e^{2\mathrm{i}\theta}+1}.$$

2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2\mathrm{i}\Big(1-\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}+e^{2\mathrm{i}\theta}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}+e^{2\mathrm{i}\theta}}\Big) \\ &= 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\sin(2n\theta). \end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$g(\theta) = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}\cos(n\theta).$$

4. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\cos^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout réel θ :

$$g'(\theta)=\frac{-2\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}=\frac{-\sin(2\theta)}{1+\frac{1}{2}\big(1+\cos(2\theta)\big)}=\frac{-2\sin(2\theta)}{3+\cos(2\theta)}$$

$$=\frac{-2\cdot\dfrac{e^{2\mathrm{i}\theta}-e^{-2\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}{3+\dfrac{e^{2\mathrm{i}\theta}+e^{-2\mathrm{i}\theta}}{2}}=2\mathrm{i}\frac{e^{2\mathrm{i}\theta}-e^{-2\mathrm{i}\theta}}{6+e^{2\mathrm{i}\theta}+e^{-2\mathrm{i}\theta}}=2\mathrm{i}\cdot\frac{e^{4\mathrm{i}\theta}-1}{e^{4\mathrm{i}\theta}+6e^{2\mathrm{i}\theta}+1}.$$

2. Pour tout réel θ :

$$2\mathrm{i}\Big(1-\big(\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}+e^{2\mathrm{i}\theta}}+\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}+e^{2\mathrm{i}\theta}}\big)\Big)=2\mathrm{i}\Big(1-\frac{2+6e^{2\mathrm{i}\theta}}{e^{4\mathrm{i}\theta}+6e^{2\mathrm{i}\theta}+1}\Big)$$

$$=2\mathrm{i}\cdot\frac{e^{4\mathrm{i}\theta}-1}{e^{4\mathrm{i}\theta}+6e^{2\mathrm{i}\theta}+1}=g'(\theta)$$

D'où :

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=2\mathrm{i}\Big(1-\frac{1}{1+(3-2\sqrt{2})e^{2\mathrm{i}\theta}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{e^{2\mathrm{i}\theta}}\cdot\frac{1}{1+(3-2\sqrt{2})e^{-2\mathrm{i}\theta}}\Big)\\&=2\mathrm{i}\Big(1-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n e^{2n\mathrm{i}\theta}\\&\qquad\qquad-(3-2\sqrt{2})e^{-2\mathrm{i}\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n e^{-2n\mathrm{i}\theta}\Big)\\&=2\mathrm{i}\Big(1-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n e^{2n\mathrm{i}\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n e^{-2n\mathrm{i}\theta}\Big)\\&=2\mathrm{i}\Big(1-1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\big(e^{2n\mathrm{i}\theta}-e^{-2n\mathrm{i}\theta}\big)\Big)\\&=4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\sin(2n\theta).\end{aligned}$$

3. On a, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$g(\theta)=g(0)+\int_0^\theta g'(t)\mathrm{d}t=\ln(2)+4\int_0^\theta\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\sin(2nt)\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}$: $\big|(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\sin(2nt)\big|\leqslant(3-2\sqrt{2})^n$, et la série $\sum(3-2\sqrt{2})^n$ converge puisque $0<3-2\sqrt{2}<1$, d'où :

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \ln(2) + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3-2\sqrt{2})^n\Big[\frac{-\cos(2nt)}{2n}\Big]_0^\theta \\
&= \ln(2) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}\cos(2nt) \\
&\qquad\qquad - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}.
\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n} = \ln(1+3-2\sqrt{2}) = \ln(2)+\ln(2-\sqrt{2})$.

D'où : $\displaystyle g(\theta) = -\ln(2) - 2\ln(2-\sqrt{2}) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}\cos(n\theta)$,

et comme la série $\displaystyle\sum(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}\cos(2n\theta)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{\pi}{2}\big(-\ln(2) - 2\ln(2-\sqrt{2})\big) \\
&\qquad + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n\theta)\mathrm{d}\theta}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{2}\Big(-\ln(2) + 2\ln\big(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\big)\Big) = \frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\Big) \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\Big(\big(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\big)^2\Big) = \pi\ln\Big(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Exercice (2). Calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2-2x\cos(t)+1\right)\mathrm{d}t$ (Intégrale de Poisson)

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

1. Montrer que la fonction $f_x:\ t\mapsto \ln\left(x^2-2x\cos(t)+1\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, et tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$(x^n-1)^2=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)+1\right).$$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_x(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}4\pi\ln(|x|) & \text{si } |x|>1\\ 0 & \text{si } |x|<1\end{cases}.$
4. Et si $x=1$ ou $x=-1$?

▶ **Corrigé.–**

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

1. $x^2-2x\cos(t)+1=|x-e^{\mathrm{i}t}|^2\geqslant\left(|e^{\mathrm{i}t}|-|x|\right)^2=(1-|x|)^2>0$ puisque $|x|\neq 1$.

   La fonction $f_x:\ t\mapsto\ln\left(x^2-2x\cos(t)+1\right)$ est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x : $\quad x^n-1=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)$, donc :
$$x^n-1=\overline{x^n-1}=\prod_{k=1}^{n}\left(\overline{x-e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right).$$
   puis :
$$(x^n-1)^2=\prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)\cdot\left(x-e^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)+1\right).$$

3. En utilisant une somme de Riemann pour la fonction continue f, on a :
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos(t)+1\right)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2x\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)+1\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)+1\right)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\ln\left((x^n-1)^2\right)\qquad\text{d'après 2}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{n} \ln\left(|x^n - 1|\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 4\pi \ln\left(|x|\right) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}.$$

En effet, si $|x| > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{n} \ln\left(|x^n - 1|\right) &= \frac{4\pi}{n} \left(\ln\left(|x|^n\right) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{|x|^n}\right)\right) \\ &= 4\pi \ln\left(|x|\right) + \frac{4\pi}{n} \ln\left(1 - \tfrac{1}{|x|^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4\pi \ln\left(|x|\right). \end{aligned}$$

Exercice (3). simple comme Parseval

Soit $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{|1-re^{\mathrm{i}t}|^2} = \frac{2\pi}{|r^2-1|}$.

▶ **Corrigé.–**

Soit la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \dfrac{1}{1-re^{\mathrm{i}t}} \end{array}$; comme $r \neq 1$, alors la fonction f est bien définie, continue et 2π-périodique.

Premier cas : $0 < r < 1$. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{1-re^{\mathrm{i}t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{\mathrm{i}nt}$,

et comme la série trigonométrique $\sum r^n e^{\mathrm{i}nt}$ est normalement (donc uniformément) convergente puisque $0 < r < 1$, alors cette série trigonométrique est la série de Fourier de f.

Ainsi donc : $\quad \forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = \begin{cases} r^k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La formule de Parseval donne alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{|1-re^{\mathrm{i}t}|^2} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = 2r \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2k} = \frac{2\pi}{1-r^2}.$$

Second cas : $r > 1$. Pour tout réel t :

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{1-re^{\mathrm{i}t}} &= \frac{-1}{re^{\mathrm{i}t}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{r}e^{-\mathrm{i}t}} = \frac{-e^{-\mathrm{i}t}}{r} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^2} e^{-\mathrm{i}nt} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{e^{-\mathrm{i}(n+1)t}}{r^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{r^n} e^{-\mathrm{i}nt}, \end{aligned}$$

d'où : $\quad \forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ -r^{-k} & \text{si } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$.

Ainsi, d'après la formule de Parseval :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{|1-re^{\mathrm{i}t}|^2} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{2k}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{r^2}}{1-\frac{1}{r^2}} = \frac{2\pi}{r^2-1}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que : $\quad \forall r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{|1-re^{\mathrm{i}t}|^2} = \frac{2\pi}{|r^2-1|}$.

Exercice (4). Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)}\mathrm{d}t$

Soit la fonction $g : \begin{array}{rcl}]-1\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)}\mathrm{d}t \end{array}$.

1. Justifier la bonne définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$, puis que :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[, \quad g'(x) = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2}.$$

3. a) Soit $x \in]-1\,;1[$, et soit $\theta = \frac{1}{2}\arccos(x)$.
   Montrer que $g'(x) = \dfrac{2\theta}{\sin(2\theta)}$, et en déduire que :

$$g(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\big(\arccos(x)\big)^2.$$

   b) Donner la valeur de $g(1)$.
   On suppose ensuite que $x > 1$; soit $\theta = \frac{1}{2}\mathrm{argch}(x)$.
   Montrer que $g'(x) = \dfrac{2\theta}{\mathrm{sh}(2\theta)}$ et en déduire que :

$$g(x) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\big(\mathrm{argch}(x)\big)^2.$$

4. Que dire si $x = -1$?

▶ **Corrigé.–**

1. a) Pour $x \in]-1\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)}$ est définie et continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, et $\dfrac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)} \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{}$, donc cette fonction est prolongeable par continuité sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle, et g est bien définie.

   b) Soit $f : \begin{array}{rcl}]-1\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)} & \text{si } (x,t) \in]-1\,;+\infty[\times[0\,;\frac{\pi}{2}[\\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

   Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[\times\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+x\cos(t)}$: la fonction est continue, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$, et :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[, g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)}.$$

Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = 2\arctan(t)$ (et donc $t = \tan(u)$), on obtient :

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2}.$$

2. a) Pour $x \in]-1\,;1[$, $\theta = \frac{1}{2}\arccos(x) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \cos(2\theta)$, donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{1+\cos(2\theta)+\big(1-\cos(2\theta)\big)u^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)u^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\big(\tan(\theta)u\big)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \Big[\arctan\big(\tan(\theta)u\big)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta)} \cdot \arctan\big(\tan(\theta)\big) = \frac{\theta}{\sin(\theta)\cos(\theta)} \quad \text{car } \theta \in \left]0\,;\tfrac{\pi}{2}\right[\\ &= \frac{2\theta}{\sin(2\theta)} = \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \int_0^x \frac{\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0 + \Big[-\tfrac{1}{2}\big(\arccos(t)\big)^2\Big]_0^x \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\big(\arccos(x)\big)^2. \end{aligned}$$

b) La fonction g est dérivable, donc continue sur $]-1\,;+\infty[$, et :

$$g(1) = \lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\big(\arccos(x)\big)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, pour $x > 1$: $\theta = \frac{1}{2}\mathrm{argch}(x) > 0$ et $x = \mathrm{ch}(2\theta)$, d'où :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{1+\mathrm{ch}(2\theta)+\big(1-\mathrm{ch}(2\theta)\big)u^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}^2(\theta)-\mathrm{sh}^2(\theta)u^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\theta)}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-\big(\mathrm{th}(\theta)u\big)^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\theta)} \cdot \frac{\mathrm{ch}(\theta)}{\mathrm{sh}(\theta)}\Big[\mathrm{argth}\big(\mathrm{th}(\theta)u\big)\Big]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{sh}(\theta)\mathrm{ch}(\theta)} \cdot \mathrm{argth}\big(\mathrm{th}(\theta)\big) = \frac{\theta}{\mathrm{sh}(\theta)\mathrm{ch}(\theta)}$$
$$= \frac{2\theta}{\mathrm{sh}(2\theta)} = \frac{\mathrm{argch}(x)}{\sqrt{x^2-1}},$$

donc pour tout $x > 1$:

$$g(x) = g(1) + \int_1^x \frac{\mathrm{argch}(t)}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\Big[\big(\mathrm{argch}(t)\big)^2\Big]_1^x$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\big(\mathrm{argch}(x)\big)^2.$$

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln\big(1-\cos(t)\big)}{\cos(t)}$ est continue sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et se prolonge par continuité sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
   De plus, $\dfrac{\ln\big(1-\cos(t)\big)}{\cos(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \ln\big(1-\cos(t)\big) = \ln\Big(2\sin^2\big(\frac{t}{2}\big)\Big) \underset{t\to 0}{\sim} 2\ln\Big(\sin\big(\frac{t}{2}\big)\Big)$
   et $2\ln\Big(\sin\big(\frac{t}{2}\big)\Big) = 2\ln\big(\frac{t}{2} + o_0(t)\big) \underset{t\to 0^+}{\sim} 2\ln\big(\frac{t}{2}\big) \underset{t\to 0^+}{\sim} 2\ln(t)$.
   La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\big(1-\cos(t)\big)}{\cos(t)}\mathrm{d}t$ converge, et on peut donc prolonger la fonction g sur $[-1\,;+\infty[$ en posant $g(-1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\big(1-\cos(t)\big)}{\cos(t)}\mathrm{d}t$.
   Ensuite : la fonction $\psi :\ \begin{array}{rcl} [-1\,;+\infty[\times]0\,;\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)} \end{array}$
   est continue, et pour tout $b > 0$:
   Il y a une condition à mettre sur x en lien avec b, non ?

$$\forall x \leqslant b, \quad \left|\frac{\ln\big(1+x\cos(t)\big)}{\cos(t)}\right| \leqslant \max\left(\frac{-\ln\big(1-\cos(t)\big)}{\cos(t)}, \frac{\ln\big(1+b\cos(t)\big)}{\cos(t)}\right) = \varphi(t),$$

   où φ est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$; la fonction g est donc continue sur $[-1\,;+\infty[$, et :

$$g(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\big(\arccos(x)\big)^2$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\big(\arccos(-1)\big)^2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\pi^2 = -\frac{3\pi^2}{8}.$$

Exercice (5). Méthode du Trapèze

Soit $a,\ b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f:\ [a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. a) Déterminer un polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, tel que $P(a)=f(a)$ et $P(b)=f(b)$ et calculer $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{d}t$.

   Interpréter géométriquement cette intégrale.

   b) Soit la fonction $g:\ \begin{array}{rcl}[a\,;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-P(x)\end{array}$.

   Montrer que $\displaystyle\int_a^b g''(t).(t-a)(t-b)\mathrm{d}t = 2\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,
   et en déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a).\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}||f||_{\infty,[a;b]}.$$

2. En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\tfrac{b-a}{n}.\Big(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f\big(a+i.\tfrac{b-a}{n}\big)\Big)\right| \leqslant \tfrac{(b-a)^3}{12n^2}||f||_{\infty,[a;b]}$$

▶ **Corrigé.–**

1. a) Le polynôme P cherché est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points d'abscisses a et b ; il est défini par :

$$P(x)=f(a)\cdot\frac{x-b}{a-b}+f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}.$$

   et :

$$\begin{aligned}\int_a^b P(t)\mathrm{d}t &= \frac{f(a)}{a-b}\cdot\int_a^b (t-b)\mathrm{d}t+\frac{f(b)}{b-a}\cdot\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t\\ &= \frac{f(a)}{a-b}\cdot\frac{-(a-b)^2}{2}+\frac{f(b)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2}\\ &= f(a)\cdot\frac{b-a}{2}+f(b)\cdot\frac{b-a}{2}=(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

   Cette intégrale correspond graphiquement (quand f est positive) à l'aire du trapèze de sommets $(a,0),(a,f(a)),(b,f(b)),(b,0)$.

   b) Puisque P est de degré 1, alors $g''=f''$ et $g(a)=g(b)=0$.

Par conséquent, en réalisant deux I.P.P. successives :

$$\int_a^b g''(t)(t-a)(t-b)\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[g'(t)(t-a)(t-b)\Big]_a^b}_{=0} - \int_a^b g'(t)\cdot(2t-a-b)\mathrm{d}t$$

$$= -\Big(\underbrace{\Big[g(t)(2t-a-b)\Big]_a^b}_{=0} - \int_a^b 2g(t)\mathrm{d}t\Big)$$

$$= 2\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$\Big|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\cdot\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\Big| = \Big|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b P(t)\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big|\int_a^b g''(t)(t-a)(t-b)\mathrm{d}t\Big| \leqslant \tfrac{1}{2}\int_a^b |g''(t)|(t-a)(t-b)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\Big(\int_a^b (t-a)(t-b)\mathrm{d}t\Big)\cdot ||g||_\infty = \tfrac{1}{2}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \big(u+\tfrac{b-a}{2}\big)\big(\tfrac{b-a}{2}-u\big)\mathrm{d}u$$

(changement de variable : $u = t - \frac{a+b}{2}$)

$$\leqslant \frac{||g||_\infty}{2}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \Big(\big(\tfrac{b-a}{2}\big)^2 - u^2\Big)\mathrm{d}u = ||g''||_\infty \int_0^{\frac{b-a}{2}} \Big(\big(\tfrac{b-a}{2}\big)^2 - u^2\Big)\mathrm{d}u \text{ (parité)}$$

$$\leqslant ||g''||_\infty \cdot \Big[\big(\tfrac{b-a}{2}\big)^2\cdot u - \tfrac{u^3}{3}\Big]_0^{\frac{b-a}{2}} = ||g''||_\infty\cdot\Big(\big(\tfrac{b-a}{2}\big)^3 - \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{b-a}{2}\big)^3\Big)$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^3}{12}||g''||_\infty = \frac{(b-a)^3}{12}||f''||_\infty.$$

2. Pour finir :

$$\Big|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \tfrac{b-a}{n}\Big(\tfrac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\big(a+k\cdot\tfrac{b-a}{n}\big)\Big)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \tfrac{b-a}{n}\cdot\Big(\frac{f\big(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\big)+f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big)}{2}\Big)\Big)\Big|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \Big|f(t) - \tfrac{b-a}{n}\cdot\Big(\frac{f\big(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\big)+f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big)}{2}\Big)\Big|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\frac{b-a}{n}\big)^3}{12}||f''||_\infty = \frac{(b-a)^3}{12n^2}||f''||_\infty.$$

Exercice (6). Méthode de Gauss

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales définies sur $[\alpha\,;\beta]$ et $F_k = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_k)$ avec $e_k :\ \begin{array}{rcl}[\alpha\,;\beta] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^k\end{array}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$,

et soit $w :\ [\alpha\,;\beta] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

On munit E du produit scalaire $\langle \cdot\,,\cdot \rangle :\ \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t \end{array}$.

On note $G = G_{n,[\alpha\,;\beta]} = e_n - p_{F_{n-1}}(e_n)$ où $p_{F_{n-1}}(e_n)$ est la projection orthogonale de e_n sur F_{n-1}.

1. Montrer que G possède n zéros distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $]\alpha\,;\beta[$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme H_f de degré $2n-1$ tel que :
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad H_f(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad H_f'(x_i) = f(x_i).$$
3. Montrer que :
$$\forall x \in [\alpha\,;\beta],\ |f(x) - H_f(x)| \leqslant \frac{||f^{(2n)}||_{[\alpha\,;\beta]}}{(2n)!} \cdot \Big(\prod_{i=1}^n (x-x_i)^2\Big)\cdot$$
Indication : pour $c \in [\alpha\,;\beta] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, on définit la fonction $g_c :\ \begin{array}{rcl}[\alpha\,;\beta] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - H_f(x) - \dfrac{\lambda}{(2n)!}\displaystyle\prod_{i=1}^n (x-x_i)^2\end{array}$,
où $\lambda = \dfrac{(2n)!}{\prod\limits_{i=1}^n (x-x_i)^2}\big(f(c) - H_f(c)\big)\cdot$
Montrer que g_c' s'annule en $2n$ points deux à deux distincts.
Que peut-on dire si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$?
4. En déduire que :
$$\Big|\int_\alpha^\beta f(t)w(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\Big| \leqslant \frac{||f^{(2n)}||_\infty}{(2n)!} \cdot \int_\alpha^\beta \Big(\prod_{i=1}^n (t-x_i)^2\Big)\mathrm{d}t,$$
où $\lambda_i = \displaystyle\int_\alpha^\beta L_i(t)w(t)\mathrm{d}t$ avec $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant n)$.
5. **Applications.**
   a) Soit $f :\ [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$. Montrer que :
$$\Big|\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t - f\Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big| \leqslant \frac{||f^{(4)}||_{[-1\,;1]}}{135}.$$
   b) Soit $f :\ [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^6$. Montrer que :
$$\Big|\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{5}{9}f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big) + \frac{8}{9}f(0) - \frac{5}{9}f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big| \leqslant \frac{||f^{(6)}||_{[-1\,;1]}}{15750}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. Puisque $G \in F_{n-1}$, alors $\langle G\,, e_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_\alpha^\beta G(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Si G ne s'annule par sur $]\alpha\,;\beta[$, alors G garde un signe constant sur $]\alpha\,;\beta[$, et $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta G(t)w(t)\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_\alpha^\beta |G(t)|w(t)\mathrm{d}t > 0$ (car $t \mapsto |G(t)|w(t)$ est continue et strictement positive sur $]\alpha\,;\beta[$).
   Mais dans ce cas $\langle G\,, e_0\rangle \neq 0$, et on aboutit à une contradiction, donc G s'annule au moins une fois sur $]\alpha\,;\beta[$.
   On continue ensuite à raisonner par l'absurde, en supposant que G possède q zéros distincts dans $]\alpha\,;\beta[$ avec $1 \leqslant q \leqslant n-1$; on les note $x_1, x_2, \ldots, x_q$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ leurs multiplicités respectives.
   Il existe alors un polynôme Q qui ne s'annule pas sur $]\alpha\,;\beta[$ tel que $G(X) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X-x_k)^{\alpha_k}\right)Q(X)$.
   On note aussi, pour $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; soit alors $R(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{q}(X-x_i)^{\varepsilon_i}$, alors R est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et donc $\langle G\,, R\rangle = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_\alpha^\beta (t-x_1)^{\alpha_1+\varepsilon_1}\cdots(t-x_q)^{\alpha_q+\varepsilon_q}\cdot Q(t)\mathrm{d}t = 0$, ce qui est impossible car la fonction $t \mapsto (t-x_1)^{\alpha_1+\varepsilon_1}\cdots(t-x_q)^{\alpha_q+\varepsilon_q}\cdot Q(t)$ est continue, non nulle et de signe constant sur $]\alpha\,;\beta[$.
   On en déduit que $q = n$, et donc que G possède n zéros distincts dans $]\alpha\,;\beta[$.

2. Il est évident que l'application :

$$\begin{aligned} L :\ \mathbb{R}_{2n-1}[X] &\to \quad \mathbb{R}^{2n} \\ P &\mapsto \big(P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n)\big) \end{aligned}$$

   est linéaire ; elle est de plus injective, en effet : si $Q \in \mathrm{Ker}(L)$, alors $Q(x_1) = \cdots = Q(x_n) = Q'(x_1) = \cdots = Q'(x_n) = 0$, donc Q est divisible par le polynôme $(X-x_1)^2\cdots(X-x_n)^2$, donc $\deg(Q) \geqslant 2n$ ou $Q = 0$. Comme $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, alors $Q = 0$ et L est injective.
   Enfin, puisque $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$, alors L est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   Comme $\big(f(x_1), \ldots, f(x_n), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)\big) \in \mathbb{R}^{2n}$, alors ce $2n$-uplet possède un unique antécédent par L, qu'on note H_f, de sorte que :

$$\big(H_f(x_1),\ldots,H_f(x_n),H'_f(x_1),\ldots,H'_f(x_n)\big) = \big(f(x_1),\ldots,f(x_n),f'(x_1),\ldots,f'(x_n)\big).$$

3. On a $g_c(x_k) = f(x_k) - H_f(x_k) - 0 = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et $g_c(c) = f(c) - H_f(c) - \big(f(c) - H_f(c)\big) = 0$, donc g_c s'annule en (au moins) $n+1$ points deux à deux distincts de $[\alpha\,;\beta]$.

   Lemme. Soit $h :\ I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que h s'annule en p points distincts $y_1, y_2, \ldots, y_p$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$ $(p \geqslant 2)$: il existe alors $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1} \in I$ tels que :

   $$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \ldots < y_{p-1} < z_{p-1} < y_p \text{ et } h'(z_1) = \cdots = h'(z_p) = 0.$$

   En effet, le théorème de Rolle assure que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, il existe (au moins) un réel $z_i \in]y_i\,; y_{i+1}[$ tel que $h'(z_i) = 0$.

   D'après ce lemme, il existe donc $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans $]\alpha\,;\beta[\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tels que $g'(\beta_1) = \cdots = g'(\beta_n) = 0$.
   Comme $g'(x_k) = f'(x_k) - {H_f}'(x_k) - 0 = 0$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, \}$, alors g_c' s'annule en (au moins) $2n$ points distincts de $]\alpha\,;\beta[$.
   En utilisant de nouveau le lemme ci-dessus, g_c'' s'annule (au moins) en $2n-1$ points distincts de $]\alpha\,;\beta[$, et de proche en proche, ${g_c}^{(2n)}$ s'annule au moins une fois sur $]\alpha\,;\beta[$.
   Soit alors $\gamma \in]\alpha\,;\beta[$ tel que ${g_c}^{(2n)}(\gamma) = 0$; il est facile de voir que pour tout $x \in [\alpha\,;\beta]$, ${g_c}^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) - \lambda$, donc :

   $$0 = f^{(2n)}(\gamma) - \lambda \Leftrightarrow f^{(2n)}(\gamma) = \lambda,\ \text{ soit } f^{(2n)}(\gamma) = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(c - x_i)^2}\big(f(c) - H_f(c)\big),$$

   et par conséquent :

   $$\big|f(c) - H_f(c)\big| = \frac{\big|f^{(2n)}(\gamma)\big|}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)^2 \leqslant \frac{||f^{(2n)}||_{[\alpha\,;\beta]}}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)^2.$$

   D'autre part, $\big|f(x_k) - H_f(x_k)\big| = 0 = \dfrac{||f^{(2n)}||_{[\alpha\,;\beta]}}{(2n)!}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_k - x_i)^2$

   pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Ainsi : $\quad \forall x \in [\alpha\,;\beta], \quad \big|f(x) - H_f(x)\big| \leqslant \dfrac{||f^{(2n)}||_{[\alpha\,;\beta]}}{(2n)!}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)^2.$

4. Puisque $H_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et G est de degré n, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^2$ tel que $H_f(X) = G(X)\cdot Q(X) + R(X)$, d'où :

   $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta H_f(t)w(t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta G(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta R(t)w(t)\mathrm{d}t\\ &= \langle G\,, Q\rangle + \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{i=1}^{n} R(x_i)L_i(t)\Big)w(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{\alpha}^{\beta} L_i(t)w(t)\mathrm{d}t \Big) R(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i).$$

D'autre part, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$f(x_i) = H_f(x_i) = \underbrace{G(x_i)}_{=0} Q(x_i) + R(x_i) = R(x_i).$$

Ainsi donc, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} H_f(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)w(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Big| &= \Big| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)w(t)\mathrm{d}t - \int_{\alpha}^{\beta} H_f(t)w(t)\mathrm{d}t \Big| \\
&= \Big| \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(t) - H_f(t)\big) w(t)\mathrm{d}t \Big| \\
&\leqslant \int_{\alpha}^{\beta} \big|f(t) - H_f(t)\big| w(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{||f^{(2n)}||_{[\alpha\,;\beta]}}{(2n)!} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\prod_{i=1}^{n} (t - x_i)^2 \Big) w(t)\mathrm{d}t \quad \text{d'après 3.}
\end{aligned}$$

5. **Applications.**

a) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales définies sur $[-1\,;1]$, on choisit $w(t) = 1$ pour tout $t \in [-1\,;1]$ et $G = e_2 - p_{F_1}(e_2)$ avec les notations précédentes.

Puisque $\langle e_0\,, e_1 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
G &= e_2 - \frac{\langle e_2\,, e_0 \rangle}{||e_0||^2} \cdot e_0 - \frac{\langle e_2\,, e_1 \rangle}{||e_1||^2} \cdot e_1 \\
&= e_2 - \frac{2/3}{2} \cdot e_0 - 0, \quad \text{donc } G : \begin{array}{rcl} [-1\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 - \frac{1}{3} \end{array}.
\end{aligned}$$

Les racines de G dans $]-1\,;1[$ sont donc $x_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, , donc d'après ce qui précède :

$$\Big| \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \big(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\big) \Big| \leqslant \frac{||f^{(4)}||_{[-1\,;1]}}{4!} \int_{-1}^{1} \big(t + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)^2 \big(t - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)^2 \mathrm{d}t,$$

où : $\quad \lambda_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Big[\frac{t^2}{2} - \frac{t}{\sqrt{3}} \Big]_{-1}^{1} = 1,$

et $\lambda_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{t^2}{2}+\frac{t}{\sqrt{3}}\Big]_{-1}^{1} = 1,$ tandis que :

$$\int_{-1}^{1} \big(t^2-\tfrac{1}{3}\big)^2\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \big(t^2-\tfrac{1}{3}\big)^2\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \big(t^4-\tfrac{2}{3}t^2+\tfrac{1}{9}\big)\mathrm{d}t$$
$$= 2\big(\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{9}\big) = \frac{8}{45},$$

Donc :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - f\Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\right| \leqslant \frac{||f^{(4)}||_{[-1\,;1]}}{24}\cdot\frac{8}{45} = \frac{||f^{(4)}||_{[-1\,;1]}}{135}.$$

b) On travaille avec le même espace E, le même poids w que dans la question précédente.
Cette fois, on pose $G = e_3 - p_{F_2}(e_3)$ où $F_2 = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ et on vérifie facilement que $(e_0, e_1, e_2 - \frac{1}{3}e_0)$ est une base orthogonale de F_2. On en déduit donc :

$$p_{F_2}(e_3) = \frac{\langle e_3\,,e_0\rangle}{||e_0||^2}\cdot e_0 + \frac{\langle e_3\,,e_1\rangle}{||e_1||^2}\cdot e_1 + \frac{\langle e_3\,,e_2-\frac{1}{3}e_0\rangle}{||e_2-\frac{1}{3}e_0||^2}\cdot\big(e_2-\tfrac{1}{3}e_0\big)$$
$$= \frac{\langle e_3\,,e_1\rangle}{||e_1||^2}\cdot e_1 = \frac{2/5}{2/3}\cdot e_1 = \frac{3}{5}e_1,$$

donc : $\quad G = X^3 - \dfrac{3}{5}X = X\big(X-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\big(X+\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)$, et d'après le résultat général démontré en 4. :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \Big(\lambda_1 f\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) + \lambda_2 f(0) + \lambda_3 f\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\Big)\right|$$
$$\leqslant \frac{||f^{(6)}||_{[-1\,;1]}}{6!}\int_{-1}^{1}\big(t-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)^2 t^2\big(t+\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)^2\mathrm{d}t,$$

où :

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{1}\frac{t\big(t-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)}{\big(-\sqrt{\frac{3}{5}}-0\big)\big(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)}\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\big(t^2-\sqrt{\tfrac{3}{5}}t\big)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{5}{6}\cdot 2\int_{0}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{9},$$
$$\lambda_2 = \int_{-1}^{1}\frac{\big(t+\sqrt{\frac{3}{5}}\big)\big(t-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)}{\big(0+\sqrt{\frac{3}{5}}\big)\big(0-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)}\mathrm{d}t = \frac{-5}{3}\int_{-1}^{1}\big(t^2-\frac{3}{5}\big)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{5}{3}\cdot 2\int_{-1}^{1}\big(t^2-\frac{3}{5}\big)\mathrm{d}t = -\frac{10}{3}\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{5}t\Big]_{-1}^{1} = -\frac{10}{3}\big(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\big) = \frac{8}{9},$$

$$\lambda_3 = \int_{-1}^{1}\frac{\big(t+\sqrt{\frac{3}{5}}\big)t}{\big(\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{5}}\big)\sqrt{\frac{3}{5}}}\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\big(t^2+\sqrt{\tfrac{3}{5}}t\big)\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{9},$$

tandis que :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^2\Big(t^2-\frac{3}{5}\Big)^2\mathrm{d}t &= 2\int_{0}^{1}\Big(t^6-\frac{6}{5}t^4+\frac{9}{25}t^2\Big)\mathrm{d}t\\ &= 2\Big(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{3}\Big) = 2\Big(\frac{1}{7}-\frac{3}{25}\Big) = \frac{8}{175},\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t-\frac{5}{9}f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+\frac{8}{9}f(0)-\frac{5}{9}f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big| &\leqslant \frac{||f^{(6)}||_{[-1\,;1]}}{6!}\cdot\frac{8}{175}\\ &\leqslant \frac{||f^{(6)}||_{[-1\,;1]}}{15750}.\end{aligned}$$

Commentaires sur les exercices de cette leçon :

Exercice 1 : Calcul d'intégrale d'une fonction périodique avec utilisation des formules d'Euler puis d'un développement en série entière et d'une interversion somme-intégrale : pour faire le point sur toutes ces techniques.

Exercice 2 : Calcul d'une intégrale avec des somems de Riemann (d'autres méthodes sont possibles). À compléter : exercice et commentaires.

Exercice 3 : Simple comme Parseval ! Un calcul d'intégrale avec séries entières, séries de Fourier et une utilisation intelligente de la formule de Parseval.

Exercice 4 :

Exercice 5 :

Exercice 6 :

Exemples d'étude d'intégrales impropres (Leçon 422)

Exercice (1).

1. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \dfrac{e^t}{1+e^{3t}\cos^2(t)} \end{array}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(t)$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
2. **Intégrales de Bertrand**. Soient α, β deux réels. Montrer que :
   a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \text{ ou} \\ (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \end{cases}$.

   b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \text{ ou} \\ (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \end{cases}$.

   c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta < 1$,

   et : $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

   d) **Application.** Soit la fonction $f : \begin{array}{rcl}]-1\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\cdot t^x\mathrm{d}t \end{array}$.

   Justifier la bonne définition de f et montrer que f est dérivable sur son domaine, puis calculer f'.

▶ **Corrigé.**–

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t \leqslant e^{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{3nt}\cos^2(t)} \overset{[u=t-n\pi]}{=} e^{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+e^{3n\pi}\cos^2(u)}.$$

Or :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+e^{3n\pi}\cos^2(u)} \overset{[u=\frac{\pi}{2}-v]}{=} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{1+e^{3n\pi}\sin^2(v)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{1+e^{3n\pi}\sin^2(v)} \text{ par parité.}$$

$$\overset{[t=\tan(v)]}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{3n\pi}\cdot\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(1+e^{3n\pi})t^2}$$

$$= 2\lim_{A\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+e^{3n\pi}}}\cdot\arctan\left(\sqrt{1+e^{3n\pi}}t\right)\right]_0^A$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+e^{3n\pi}}}\cdot\left(\lim_{A\to+\infty}\arctan\left(\sqrt{1+e^{3}n\pi t}\right)-0\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+e^{3n\pi}}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+e^{3n\pi}}}.$$

D'où : $0 \leqslant \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \pi e^{\pi}\cdot\frac{e^{n\pi}}{\sqrt{1+e^{3n\pi}}} \leqslant \pi e^{\pi}\cdot e^{-n\frac{\pi}{2}}$,

et comme la série géométrique $\sum\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$ converge, alors la série $\sum \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Comme f est à valeurs positives, alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Par contre, $f\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = e^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $f(t)$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

2. a) • Supposons $\alpha > 1$, soit $\gamma \in]1\,;\alpha[$, alors pour tout réel β :

$$t^{\gamma}\cdot\frac{1}{t^{\alpha}\cdot\big(\ln(t)\big)^{\beta}} = \frac{\big(\ln(t)\big)^{-\beta}}{t^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,\ \text{ d'où : } \frac{1}{t^{\alpha}\big(\ln(t)\big)^{\beta}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right),$$

et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}\big(\ln(t)\big)^{\beta}}$ converge.

- Supposons $\alpha < 1$, alors pour tout réel β :

$$t \cdot \frac{1}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta} = \frac{t^{1-\alpha}}{\big(\ln(t)\big)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,$$

et comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, alors $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ diverge.

- Supposons $\alpha = 1$, alors si $\beta \neq 1$:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\big(\ln(t)\big)^\beta} &= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-\beta)\big(\ln(t)\big)^{\beta-1}}\right]_2^A \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\big(\ln(A)\big)^{\beta-1}} - \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}}\right) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \dfrac{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Enfin, si $\beta = 1$ alors pour tout $A > 2$:

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_2^A = \ln\big(\ln(A)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

b) Le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ donne, pour deux réels α et β tels que l'intégrale converge :

$$\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta} = \int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(-\ln(t)\big)^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}\big(\ln(x)\big)^{-\beta}}.$$

D'après 2.a), l'intégrale étudiée converge donc si et seulement si :

$$\begin{cases} 2-\alpha > 1 \\ \text{ou } (2-\alpha = 1 \text{ et } -\beta > 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta < -1) \end{cases}.$$

c) Le changement de variable $t = 1-u$ donne :

$$\int_{\frac12}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta} = \int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^\alpha|\ln(1-u)|^\beta}.$$

Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^\alpha|\ln(1-u)|^\beta}$ est continue sur $\left]0\,;\frac12\right[$

avec $(1-u)^\alpha|\ln(1-u)|^\beta \underset{u\to 0}{\sim} u^\beta$, et comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ converge si et seulement si $\beta<1$, alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}$ converge si et seulement si $\beta<1$.

De plus : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}|\ln(u)|^\beta}$, à nouveau avec le changement de variable $t=\frac{1}{u}$: cette dernière intégrale converge si et seulement si $\beta<1$, il en est donc de même pour l'autre intégrale qu'on étudie ici.

d) **Application.** La fonction $h:\ t\mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x$ est continue sur $]0\,;1[$, et $\dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x \xrightarrow[t\to 1]{} 1$ tandis que $\dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{t^{-x}\ln(t)}$, donc d'après 2.b) : h est intégrable sur $]0\,;1[$ si et seulement si $x>-1$, et la fonction f est par conséquent bien définie.

Ensuite, la fonction $g:\ \begin{array}{rcl}]-1\,;+\infty[\times]0\,;1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et :

pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=(t-1)t^x$.

Pour tout $a>-1$: $\forall x\in[a\,;+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^a=\varphi_a(t)$ où φ_a est intégrable sur $]0\,;1[$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres assure alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et que pour tout $x\in]-1\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^1 (t-1)t^x\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^{x+1}-t^x)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2}-\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

donc il existe un réel c tel que : $\forall x\in]-1\,;+\infty[, g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)+c$.

Pour chaque entier $n\in\mathbb{N}^*$, on définit enfin la fonction $f_n:\ \begin{array}{rcl}]0\,;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t-1}{\ln(t)}t^{x_n} \end{array}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels qui tend vers $+\infty$.

Les fonctions f_n sont continues sur $]0\,;1[$, et $g_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $t\in]0\,;1[$, avec $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t-1}{\ln(t)}=\varphi(t)$, où φ est intégrable sur $]0\,;1[$. Le théorème de convergence dominée assure alors que : $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; d'après la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Comme $\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $c=0$ et ainsi :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[,\quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

Exercice (2). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge.
2. Soient $p,\ q \in \mathbb{N}$ avec $p<q$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+t}\mathrm{d}t = 2q\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t.$$
3. Pour $k\in\mathbb{Z}$, on note $z_k = e^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}$. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:
$$\frac{t^{2p}}{t^{2q}+1} = \frac{-1}{2q}\sum_{k=0}^{2q-1}\frac{z_k^{2p+1}}{t-z_k}.$$
Et en déduire que : $$\frac{t^{2p}}{t^{2q}+1} = \frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{t+z_k}-\frac{1}{t-z_k}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $A>0$ et pour tout $\theta \in]0\,;\pi[$:
$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t-e^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{-1}{2}\ln\left(A^2-2A\cos(\theta)+1\right)+\mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{A-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)+\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$
5. Montrer alors que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+e^{\mathrm{i}\theta}}-\frac{1}{t-e^{\mathrm{i}\theta}}\right)\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\pi.$
6. En déduire que : $\displaystyle 2q\cdot\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.$
7. En déduire que pour tout $x\in]0\,;1[$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue et positive sur $]0\,;+\infty[$,

de plus $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x-1>-1 \Leftrightarrow x>0$.

Par ailleurs, $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-x}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2-x}}$ converge si et seulement si $2-x>1 \Leftrightarrow x<1$.

On en conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $0<x<1$.

2. Avec le changement de variable $t=u^{2q}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+t}\mathrm{d}t = 2q\int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\mathrm{d}u\cdot$$

3. L'équation : $\quad x^{2q}+1=0 \Leftrightarrow x^{2q}=-1 \Leftrightarrow x^{2q}=e^{\mathrm{i}\pi}$ a pour solutions les nombres complexes $(z_k)_{0\leqslant k\leqslant 2q-1}$ avec $z_k = e^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}$.

On sait alors qu'il existe une suite finie $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant 2q-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ tels que $\dfrac{t^{2p}}{t^{2q}+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2q-1} \frac{\alpha_k}{t-z_k}$. Comme les $(z_k)_{0\leqslant k\leqslant 2q-1}$ sont racines simples, alors :

$$\alpha_k = \frac{z_k^{2p}}{2qz_k^{2q-1}} = \frac{1}{2q}\cdot\frac{z_k^{2p+1}}{z_k^{2q}} = \frac{-1}{2q}z_k^{2p+1} \quad (\text{car } z_k^{2q}=-1)\cdot$$

Ainsi : $\quad \dfrac{t^{2p}}{t^{2q}+1} = \dfrac{-1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} \frac{z_k^{2p+1}}{t-z_k}$.

Le polynôme $Q(X)=X^{2q}+1$ est pair, donc pour toute racine z_k de Q, $-z_k$ est aussi racine.

Comme pour tout $k\in\{0,1,\ldots,q-1\}$, $\mathrm{Im}(z_k)=\sin\left(\frac{2k+1}{2q}\pi\right)>0$, alors : pour tous entiers k, ℓ de $\{0,1,\ldots,q-1\}$, $z_\ell+z_k\neq 0$, et ainsi :

$$\frac{t^{2p}}{t^{2q}+1} = \frac{-1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{z_k^{2p+1}}{t-z_k}+\frac{(-z_k)^{2p+1}}{t-(-z_k)}\right) = \frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{t+z_k}-\frac{1}{t-z_k}\right)\cdot$$

4. Pour tout $A>0$, et pour tout $\theta\in]0\,;\pi[$:

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t-e^{\mathrm{i}\theta}} &= \int_0^A \frac{t-e^{-\mathrm{i}\theta}}{|t-e^{\mathrm{i}\theta}|}\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{t-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^A \frac{2t-2\cos(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^A \frac{\sin(\theta)}{\big(t-\cos(\theta)\big)^2+\sin^2(\theta)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\ln\big(t^2 - 2t\cos(\theta) + 1\big)\Big]_0^A + \mathrm{i}\int_0^A \frac{1}{1 + \big(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\big)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin(\theta)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\big(A^2 - 2A\cos(\theta) + 1\big) + \mathrm{i}\Big[\arctan\Big(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)\Big]_0^A$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\big(A^2 - 2A\cos(\theta) + 1\big)$$

$$+\,\mathrm{i}\Big(\arctan\Big(\frac{A-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big) + \arctan\big(\mathrm{cotan}(\theta)\big)\Big)$$

Or $\mathrm{cotan}(\theta) = \tan\big(\frac{\pi}{2} - \theta\big)$, et comme $\theta \in]0\,;\pi[$, alors $\frac{\pi}{2} - \theta \in \big] -\frac{\pi}{2}\,;\pi\big[$, et donc $\arctan\big(\mathrm{cotan}(\theta)\big) = \arctan\big(\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)\big) = \frac{\pi}{2} - \theta$, de sorte que :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t - e^{\mathrm{i}\theta}} = \tfrac{1}{2}\ln\big(A^2 - 2A\cos(\theta) + 1\big) + \mathrm{i}\Big(\arctan\Big(\frac{A-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big) + \tfrac{\pi}{2} - \theta\Big)\cdot$$

5. De même :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t + e^{\mathrm{i}\theta}} = \int_0^A \frac{t + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)}{t^2 + 2t\cos(\theta) + 1}\mathrm{d}t$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^A \frac{2t + 2\cos(\theta)}{t^2 + 2t\cos(\theta) + 1}\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^A \frac{1}{1 + \big(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\big)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin(\theta)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\big(A^2 + 2A\cos(\theta) + 1\big) - \mathrm{i}\Big[\arctan\Big(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)\Big]_0^A$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\big(A^2 + 2A\cos(\theta) + 1\big) - \mathrm{i}\Big(\arctan\Big(\frac{A+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big) - \tfrac{\pi}{2} + \theta\Big)$$

D'où :

$$\int_0^A \Big(\frac{1}{t + e^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{t - e^{-\mathrm{i}\theta}}\Big)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln\Big(\frac{A^2 + 2A\cos(\theta) + 1}{A^2 - 2A\cos(\theta) + 1}\Big)$$

$$-\mathrm{i}\Big(\arctan\Big(\frac{A+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big) + \arctan\Big(\frac{A-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Big)\Big)$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 - \mathrm{i}\big(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\big) = -\mathrm{i}\pi.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{t + e^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{t - e^{-\mathrm{i}\theta}}\Big)\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{t + e^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{t - e^{-\mathrm{i}\theta}}\Big)\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\pi\cdot$$

6. On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned}
2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{t+e^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}}-\frac{1}{t-e^{-\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}}\Big)\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i}\pi\cdot\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = -\mathrm{i}\pi\cdot\sum_{k=0}^{q-1}\big(e^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}\big)^{2p+1} \\
&= -\mathrm{i}\pi\cdot\sum_{k=0}^{q-1}\big(e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}\big)^{2k+1} = -\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}\cdot\sum_{k=0}^{q-1}\big(e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{q}\pi}\big)^{k} \\
&= -\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}\cdot\frac{1-e^{\mathrm{i}(2p+1)\pi}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{q}\pi}} = 2\mathrm{i}\pi\frac{e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}}{e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{q}\pi}-1} \\
&= 2\mathrm{i}\pi\cdot\frac{1}{e^{\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}-e^{-\mathrm{i}\frac{2p+1}{2q}\pi}} = \frac{2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\sin\big(\frac{2p+1}{2q}\pi\big)} \\
&= \frac{\pi}{\sin\big(\frac{2p+1}{2q}\pi\big)}.
\end{aligned}$$

7. Soit $\varepsilon>0$, et soit $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q}<\varepsilon$. On note $p=E(qx)$ (partie entière de qx), alors : $p\leqslant qx<p+1$, donc $\frac{2p}{2q}=\frac{p}{q}\leqslant x<\frac{p+1}{q}=\frac{2p+2}{2q}$, d'où : $\big|x-\frac{2p+1}{2q}\big|\leqslant\frac{1}{2q}<\frac{1}{q}<\varepsilon$.

   Ainsi, l'ensemble $D=\big\{\frac{2p+1}{2q}\,;\ q\in\mathbb{N}^*\text{ et }0\leqslant p<q\big\}$ est dense dans $]0\,;1[$. On peut donc trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x, et alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha_n-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_n)}$.

   D'autre part, la fonction $\psi:\ \begin{array}{rcl}]0\,;1[\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t}\end{array}$ est continue.

   Soient alors $a,b\in]0\,;1[$ quelconques, tels que $a<b$. Pour tout x de $[a\,;b]$: $0\leqslant\dfrac{t^{x-1}}{1+t}\leqslant\dfrac{t^{a-1}}{1+t}=\varphi_a(t)$, où φ_a est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction $h:\ \begin{array}{rcl}]0\,;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t\end{array}$ est continue, d'où :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha_n-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_n)}=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Exercice (3). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \ (p \in \mathbb{N})$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p+1}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\cdot$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{2\cdot(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t\cdot$$
3. En déduire que :
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\mathrm{d}t\cdot$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus n\mathbb{Z}$ et $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par : $g_x(t) = \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)$.

   Déterminer la série de Fourier de g_x et en déduire que :
$$\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x\cdot(-1)^n\sin(x)}{x^2-n^2} = 1\cdot$$
5. En déduire que :
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\Big(1-\frac{\sin(t)}{t}\Big)\mathrm{d}t\cdot$$
   puis que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t\cdot$
6. En déduire pour finir, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot$$
   et
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{(2p+1)!}{2^{2p}\cdot(p!)^2}\cdot$$

▶ **Corrigé .–**

1. La fonction $f:\ \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2} \end{array}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$,

   et $\dfrac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2p+1}{2}$, donc f se prolonge par continuité en 0.

   De plus, pour tout $t \geqslant 1$: $\big|f(t)\big| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, donc f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, et donc f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   Ensuite, pour $\varepsilon, A \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\varepsilon < A$:

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^A \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t \\
=&\Big[-\frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t}\Big]_\varepsilon^A + (2p+1)\int_\varepsilon^A \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{(I.P.P.)} \\
=&-\frac{1-\big(\cos(A)\big)^{2p+1}}{A} + \frac{1-\big(\cos(\varepsilon)\big)^{2p+1}}{\varepsilon} + (2p+1)\int_\varepsilon^A \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\cdot
\end{aligned}$$

   Or : $\dfrac{1-\big(\cos(\varepsilon)\big)^{2p+1}}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{(2p+1)\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et $0 \leqslant \dfrac{1-\big(\cos(A)\big)^{2p+1}}{A} \leqslant \dfrac{2}{A}$,
   donc :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t \\
=&-\lim_{A\to+\infty}\frac{1-\big(\cos(A)\big)^{2p+1}}{A} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\big(\cos(\varepsilon)\big)^{2p+1}}{\varepsilon} \\
&+ (2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \\
=&(2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\cdot
\end{aligned}$$

2. Avec le changement de variable $u = t - n\pi$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-\cos(u)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(u)\big)^{2p}\cdot\frac{(-1)^n\sin(u)}{u+n\pi}\mathrm{d}u\cdot
\end{aligned}$$

Or, avec le changement de variable $v=-u$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\big(\cos(u)\big)^{2p}\cdot\frac{(-1)^n\sin(u)}{u+n\pi}\mathrm{d}u=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(v)\big)^{2p}\cdot\frac{(-1)^n\sin(v)}{v-n\pi}\mathrm{d}v\cdot$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(u)\big)^{2p}(-1)^n\sin(u)\Big(\frac{1}{u+n\pi}+\frac{1}{u-n\pi}\Big)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(u)\big)^{2p}\cdot\frac{2\cdot(-1)^n\cdot u\sin(u)}{u^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}u\cdot\end{aligned}$$

3. D'après 2 :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t\Big)\cdot$$

Or : $\forall t\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$, $\left|\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\dfrac{2(-1)^nt\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{n^2\pi^2-\big(\frac{\pi}{2}\big)^2}=\dfrac{2}{\pi^2(n^2-\frac14)}$,

et $\dfrac{1}{n^2-\frac14}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}\cdot$

Comme la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\sum\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\dfrac{2(-1)^nt\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}$ converge normalement sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, d'où :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n\cdot t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\mathrm{d}t\cdot$$

4. La fonction g_x est 2π-périodique, paire donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(g_x)=0$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}a_n(g_x)&=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\big(\tfrac{x}{\pi}t\big)\cos(nt)\mathrm{d}t\\&=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos\big((\tfrac{x}{\pi}-n)t\big)+\cos\big((\tfrac{x}{\pi}+n)t\big)\Big)\mathrm{d}t\\&=\tfrac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\big((\frac{x}{\pi}-n)t\big)}{\frac{x}{\pi}-n}+\frac{\sin\big((\frac{x}{\pi}+n)t\big)}{\frac{x}{\pi}+n}\right]_0^{\pi}\\&=\tfrac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(x-n\pi)}{x-n\pi}+\frac{\sin(x+n\pi)}{x+n}\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin(x)\cdot\Big(\frac{1}{\frac{x}{\pi}-n}+\frac{1}{\frac{x}{\pi}+n}\Big)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin(x)\cdot\frac{\frac{2}{\pi}x}{\frac{x^2}{\pi^2}-n^2}$$
$$= 2\cdot(-1)^n\cdot\frac{x\sin(x)}{x^2-n^2}.$$

Enfin : $\quad a_0(g_x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\sin\left(\frac{x}{\pi}t\right)}{x}\right]_0^{\pi}=\frac{2\sin(x)}{x}.$

La fonction g_x étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g_x(t)=\frac{\sin(x)}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Et en particulier : $\quad 1=g_x(0)=\dfrac{\sin(x)}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}.$

5. Grâce à ce qui précède, on peut écrire :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\mathrm{d}t \quad \text{d'après 3}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\Big(1-\frac{\sin(t)}{t}\Big)\mathrm{d}t \quad \text{(d'après 4)}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

D'où : $\quad \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t.$

6. On a, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p-1}\cdot\cos(t)\mathrm{d}t \quad \text{(on réalise une I.P.P.)}$$
$$=\underbrace{\Big[\big(\cos(t)\big)^{2p-1}\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+(2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p-2}\sin^2(t)\mathrm{d}t$$
$$=(2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p-2}\cdot\big(1-\cos^2(t)\big)\mathrm{d}t$$
$$=(2p-1)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p-2}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t\Big).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\mathrm{d}t &= \frac{2p-1}{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p-2}(t)\mathrm{d}t \\ &= \cdots = \frac{(2p-1)\cdots 3\cdot 1}{2p(2p-2)\cdots 4\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{2p(2p-1)(2p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{\big(2p(2p-2)\cdots 4\cdot 2\big)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{\big(2^p\cdot p!\big)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$,
puis :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\mathrm{d}t &= (2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^{2p}\cdot(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Exercice (4). Formule des résidus

1. Soit $z = x + \mathrm{i} \cdot y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (on a donc $y \neq 0$), soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction $f_{n,z} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{(t-z)^n} \end{array}$.

   a) Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $f_{n,z}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^n} = 0\cdot$

   b) Montrer que $f_{1,z}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais que :

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \mathrm{i}\pi \cdot \frac{y}{|y|} = \begin{cases} \mathrm{i}\pi & \text{si } y > 0 \\ -\mathrm{i}\pi & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

2. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle (P et Q étant des polynômes à coefficients complexes).

   On suppose que Q n'a pas de racines réelles ; on note $z_1, \dots, z_r$ les racines complexes de Q et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives (et bien sûr, $P(z_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$).

   On sait que la décomposition en éléments simples de F est :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{k,j}}{(X - z_k)^j}.$$

   On appelle **résidu** de F au point z_k et on note $\mathrm{Res}(F, z_k)$, le nombre complexe $A_{k,1}$.

   a) Montrer que si z_k est une racine simple de Q, alors :

$$\mathrm{Res}(F, z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}\cdot$$

   b) On suppose que $\deg(Q) \geqslant \deg(P) + 2$: montrer que dans ce cas, la fonction F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi \cdot \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{Res}(F, z_k) \cdot \frac{y_k}{|y_k|},$$

   où $z_1, \dots, z_\ell$ sont les racines simples de Q.

3. **Application.** Calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $i : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto (t-z)^{-n} \end{array}$ est continue, et vérifie : $(t-z)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$ ·

   Comme pour tout $n \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^n}$ est intégrable sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, alors pour tout $n \geqslant 2$ la fonction $t \mapsto (t-z)^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels A et B avec $A < B$:

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^n} = \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(t-z)^{n-1}}\right]_A^B = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(A-z)^{n-1}} - \frac{1}{(B-z)^{n-1}}\right) \xrightarrow[B\to+\infty]{A\to-\infty} 0,$$

   donc pour tout entier $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^n} = 0$ ·

   b) On sait que $\dfrac{1}{t-z} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, et que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1\,;+\infty[$; la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$ n'est donc par intégrable sur $[1\,;+\infty[$, et donc pas sur $\mathbb{R}$ non plus.

   D'autre part, pour tout $A > 0$, on a pour $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} &= \int_{-A}^{A} \frac{t-\overline{z}}{|t-z|^2}\mathrm{d}t = \int_{-A}^{A} \frac{t-x+\mathrm{i}y}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-A}^{A} \frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{-A}^{A} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln\big((t-x)^2+y^2\big)\Big]_{-A}^{A} + \frac{\mathrm{i}}{y}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t-x}{y}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(A-x)^2+y^2}{(A+x)^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\Big[\arctan\left(\tfrac{t-x}{y}\right)\Big]_{-A}^{A} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(A-x)^2+y^2}{(A+x)^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\Big(\arctan\left(\frac{A-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{A+x}{y}\right)\Big) \\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 + \begin{cases} \mathrm{i}\pi & \text{si } y > 0 \\ -\mathrm{i}\pi & \text{si } y < 0 \end{cases} = \mathrm{i}\pi\frac{y}{|y|}.
\end{aligned}$$

2. a) Si z_k est racine simple de Q, alors il existe un polynôme R à coefficients complexes tel que $R(z_k) \neq 0$ et $Q(X) = (X - z_k)R(X)$.

   Mais alors : $Q'(X) = (X - z_k)R'(X) + R(X)$, donc $Q'(z_k) = R(z_k)$.

D'autre part, $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{A_{k,1}}{X-z_k}+\sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant r\\ \ell\neq k}}\Big(\sum_{j=1}^{m_\ell}\frac{A_{\ell,j}}{(X-z_k)^j},$$

de sorte qu'après multiplication par $X-z_k$, cette identité devient :

$$\frac{P(X)}{R(X)}=A_{k,1}+(X-z_k)\sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant r\\ \ell\neq k}}\Big(\sum_{j=1}^{m_\ell}\frac{A_{\ell,j}}{(X-z_k)^j}\Big).$$

En évaluant cette identité en z_k, on obtient donc : $\dfrac{P(z_k)}{R(z_k)}=A_{k,1}+0$, et comme $R(z_k)=Q'(z_k)$, alors $A_{k,1}=\dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$.

b) La fonction $F=\dfrac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues, dont le dénominateur Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Il est de plus clair qu'au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, en notant $d=\deg(Q)-\deg(P)$, on a $\dfrac{P(t)}{Q(t)}=O\Big(\dfrac{1}{t^d}\Big)$, où $t\mapsto\dfrac{1}{t^d}$ est intégrable sur $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$ puisque $d\geqslant 2$.
La fonction F est donc intégrable aussi sur ces deux intervalles, et elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}$.
Enfin, avec une décomposition en éléments simples de F de la forme :

$$F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}=\sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{k,j}}{(X-z_k)^j}\Big),$$

on a pour tout $A>0$: $\displaystyle\int_{-A}^{A}F(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{m_k}A_{k,j}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{(t-z_k)^j}\Big).$

Or d'après la question 1. : $\displaystyle\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{(t-z_k)^j}\xrightarrow[A\to+\infty]{}\begin{cases}0 & \text{si } j\geqslant 2\\ \mathrm{i}\pi\frac{y_k}{|y_k|} & \text{si } j=1\end{cases}$
avec $y_k=\mathrm{Im}(z_k)$, de sorte que :

$$\int_{-A}^{A}\frac{P(t)}{Q(t)}\mathrm{d}t\xrightarrow[A\to+\infty]{}\mathrm{i}\pi\sum_{k=1}^{r}A_{k,j}\cdot\frac{y_k}{|y_k|},$$

soit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\mathrm{d}t=\mathrm{i}\pi\cdot\sum_{k=1}^{\ell}\mathrm{Res}(F,z_k)\cdot\frac{y_k}{|y_k|}.$

3. On a ici : $F(X) = \dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{1}{\prod\limits_{k=0}^{3}(X-z_k)}$, où z_0, z_1, z_2, z_3 sont les racines quatrièmes de -1, à savoir : $z_k = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
Ainsi, d'après 2.b) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \mathrm{i}\pi \cdot \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}(F, z_k) \cdot \frac{y_k}{|y_k|}$,
et d'après 2.c) :

$$\mathrm{Res}(F, z_k) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z_k}{z_k^4} = -\frac{1}{4} z_k \text{ puisque } z_k^4 = -1\cdot$$

Or : $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -z_0$ et $z_3 = -z_1$, de sorte que y_0, y_1 sont positifs, et y_2, y_3 sont négatifs.
Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \mathrm{i}\pi \cdot \left(-\frac{1}{4}(z_0+z_1-z_2-z_3)\right) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{4}(2z_0+2z_1)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(z_0+z_1) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2} \cdot \mathrm{i}\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot$$

La fonction intégrée étant paire, on en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercice (5). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $r:\ t\mapsto \dfrac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction $k:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 2(x^2+1)\cdot k'(x)+(x-\mathrm{i})\cdot k(x)=0.$$
3. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\cdot\cos\left(\tfrac12\arctan(x)\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}}.$$
et :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\cdot\sin\left(\tfrac12\arctan(x)\right)=\sqrt{\frac{\pi(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(1+x^2)}}.$$

► **Corrigé.–**

1. La fonction $r:\ t\mapsto \dfrac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$,

   et $\dfrac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc r est intégrable sur $]0\,;1]$.

   De plus, $t^2\cdot r(t)=t^{\frac32}\cdot e^{-t}\cdot e^{\mathrm{i}xt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, donc $r(t)=o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et r est inégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Finalement, r est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction $g:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{C}\\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$,

   et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\mathrm{i}\sqrt{t}\cdot e^{(-1+\mathrm{i}x)t}$, puis : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\sqrt{t}\cdot e^{-t}=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
   On en déduit, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

que k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\cdot e^{(-1+\mathrm{i}x)t}\mathrm{d}t.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\cdot \lim_{\substack{A\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^A \sqrt{t}e^{-t}e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{i}\cdot \lim_{\substack{A\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \Big(\Big[\frac{1}{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}xt}\sqrt{t}e^{-t}\Big]_\varepsilon^A - \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}xt}\big(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\big)e^{-t}\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)} \\
&= \mathrm{i}\cdot\Big(\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}xA}\sqrt{A}e^{-A} - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}x\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}e^{-\varepsilon} \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}xt}\big(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\big)e^{-t}\mathrm{d}t\Big) \\
&= \mathrm{i}\cdot\Big(0-0-\frac{1}{\mathrm{i}x}\cdot\Big(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t\Big)\Big) \\
&= \frac{-1}{2x}\cdot k(x) + \frac{1}{\mathrm{i}x}\cdot k'(x),
\end{aligned}$$

d'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = \dfrac{\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i}x)}\cdot k(x) = \dfrac{\mathrm{i}-x}{2(1+x^2)}\cdot k(x)\cdot$

3. D'après 2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
k(x) &= k(0)\cdot\exp\Big(\int_0^x \frac{-t+\mathrm{i}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t\Big) \\
&= \sqrt{\pi}\cdot\exp\Big(-\frac{1}{4}\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\Big)\cdot\exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\Big),
\end{aligned}$$

puisque $k(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$ avec le changement de variable $t = u^2$.
D'où, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
k(x) &= \sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\arctan(x)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\Big(\cos\big(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\big) + \mathrm{i}\cdot\sin\big(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\big)\Big),
\end{aligned}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\big(k(x)\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cdot\cos\big(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\big),$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\right) \cdot$$

4. On note $\theta = \frac{1}{2}\arctan(x)$, alors : $2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta)$, et on a :

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1}{1+\tan^2(2\theta)} = \frac{1}{1+\Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

et comme $2\theta = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos(2\theta) > 0$ et donc :

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ puis } 2\cos^2(\theta) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ainsi : $\cos^2(\theta) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}$, et comme $\theta = \frac{1}{2}\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4}\right[$,

alors $\cos(\theta) > 0$, donc $\cos(\theta) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi(\sqrt{1+x^2}+1)}{2(1+x^2)}}.$$

De même, $\sin^2(\theta) = \dfrac{1}{2}\big(1-\cos(2\theta)\big) = \dfrac{1}{2}\big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}$, et

$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ a le même signe que x,

d'où : $\sin(\theta) = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$ avec $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, puis :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\pi(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(1+x^2)}}.$$

Exercice (6). Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln\big(\sin(t)\big)\big)^2 \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln\big(\sin(t)\big)\big)^n \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln\big(\cos(t)\big)\big)^n \mathrm{d}t$ convergent et sont égales.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\big(a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)\big) \end{array}$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \sin(2kx),$$
   et en déduire que :
   $$f(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \frac{\cos(2kx)}{k}.$$
   b) Montrer que la fonction f est π-périodique et déterminer sa série de Fourier.
   c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$, et que :
   $$\int_0^{\pi} \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + \pi \cdot \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{k^2}.$$
3. En déduire que :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(t)\big)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2),$$
   et : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln\big(\sin(t)\big)\big)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\big(\ln(2)\big)^2 + \frac{\pi^3}{24}$.
   Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée avec $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $b_n = \dfrac{n}{n+1}$.

► **Corrigé.**–

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \big(\ln\big(\sin(t)\big)\big)^n$ est continue sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;

comme de plus $\sin(t) = t + o(t)$, alors :

$$\ln\big(\sin(t)\big) = \ln\big(t + o(t)\big) = \ln(t) + \ln\big(1 + o(1)\big) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t),$$

donc $\Big(\ln\big(\sin(t)\big)\Big)^n \underset{t\to 0}{\sim} \big(\ln(t)\big)^n$. Comme $\big(\ln(t)\big)^n = o\big(\frac{1}{\sqrt{t}}\big)$ et comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\ln\big(\sin(t)\big)\Big)^n \mathrm{d}t$ converge.
Enfin, en utilisant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, on constate que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\ln\big(\sin(t)\big)\Big)^n \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \Big(\ln\Big(\sin\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\Big)\Big)^n (-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\ln\big(\cos(x)\big)\Big)^n \mathrm{d}x.$$

2. a) Les réels a et b sont strictement positifs, donc $-1 < \dfrac{b-a}{b+a} < 1$: on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)^k e^{2\mathrm{i}kx}$ converge, et :

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k e^{2\mathrm{i}kx} = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b-a}{b+a}\cdot e^{2\mathrm{i}kx}\right)^k &= 4 \cdot \frac{\frac{b-a}{b+a}\cdot e^{2x}}{1 - \frac{b-a}{b+a}e^{2\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{4(b-a)e^{2\mathrm{i}x}}{b+a-(b-a)e^{2\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{4(b-a)e^{2\mathrm{i}x}\big(b+a-(b-a)e^{-2\mathrm{i}x}\big)}{\big(b+a-(b-a)e^{2\mathrm{i}x}\big)\big(b+a-(b-a)e^{-2\mathrm{i}x}\big)} \\
&= \frac{4(b^2-a^2)e^{2\mathrm{i}x} - 4(b-a)^2}{(b+a)^2 - 2(b^2-a^2)\cos(2x) + (b-a)^2},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \sin(2kx) &= \frac{4(b^2-a^2)\sin(2x)}{2(b^2+a^2) - 2(b^2-a^2)\cos(2x)} \\
&= \frac{2(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\big(1+\cos(2x)\big) + b^2\big(1-\cos(2x)\big)} \\
&= \frac{2(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\cdot 2\cos^2(x) + b^2\cdot 2\sin^2(x)} \\
&= \frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)} = f'(x).
\end{aligned}$$

D'autre part, la série $\sum \left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)^k \sin(2kx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$: en effet pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\left|\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)^k \sin(2kx)\right| \leqslant \left(\dfrac{|b-a|}{b+a}\right)^k$, où la série géométrique de raison $\dfrac{|b-a|}{b+a} < 1$ converge : on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t &= f(0) + \int_0^x 4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \sin(2kt)\mathrm{d}t \\
&= \ln(a^2) + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \int_0^x \sin(2kt)\mathrm{d}t \\
&= \ln(a^2) + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \left(\frac{-\cos(2kx)}{2k} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \ln(a^2) + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \cdot \frac{\cos(2kx)}{k} \\
&= 2\ln(a) - 2\ln\left(1 - \tfrac{b-a}{b+a}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \frac{\cos(2kx)}{k} \\
&= 2\ln\left(\frac{b+a}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \frac{\cos(2kx)}{k}.
\end{aligned}
$$

b) Il est évident que f est π-périodique ; comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k \cdot \frac{\cos(2kx)}{k}$, et comme cette série trigonométrique converge normalement (ce qu'on prouve facilement), alors cette série est la série de Fourier de f.

c) D'après b), on a donc : $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = a_0(f) = 4\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$, mais d'après le changement de variable $t = \pi - x$, on a : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$, puisque :

$$
\begin{aligned}
f(\pi - x) &= \ln\left(a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)\right) \\
&= \ln\left(a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)\right) = f(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)\right)\mathrm{d} = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \pi \cdot \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).
$$

D'autre part, f est de classe $\mathcal{C}^1$ (dont est continue par morceaux) :

on peut donc utiliser la formule de Parseval. Elle donne :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Big(2\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-2\cdot\frac{b-a}{b+a}\cdot\frac{1}{k}\Big)^2$$

$$=2\Big(\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)^2+4\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{b-a}{b+a}\Big)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2},$$

d'où : $\displaystyle\int_0^{\pi}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\pi\Big(\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)^2+2\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{b-a}{b+a}\Big)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2}.$

Comme pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=f(\pi-t)$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t,$$

puis :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\Big(\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)^2+\pi\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{b-a}{b+a}\Big)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2}.$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soient $a_n=\dfrac{1}{n+1}$ et $b_n=\dfrac{n}{n+1}$, on a d'après 2.c) :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\big(a_n^2\cos^2(t)+b_n^2\sin^2(t)\big)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{a_n+b_n}{2}\Big),\ \text{et}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\ln\big(a_n^2\cos^2(t)+b_n^2\sin^2(t)\big)\Big)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\Big(\ln\Big(\frac{a_n+b_n}{2}\Big)\Big)^2+\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\Big)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2}.$$

Soit aussi, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g_n:\ \begin{array}{rcl}\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \ln\big(a_n^2\cos^2(t)+b_n^2\sin^2(t)\big)\end{array}.$

Les fonctions g_n et $t\mapsto\big(g_n(t)\big)^2$ sont continues sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $t\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $g_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln\big(\sin^2(t)\big)$ et $\big(g_n(t)\big)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}\big(\ln\big(\sin^2(t)\big)\big)^2$.

Or pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad g_n(t)\leqslant\ln\big(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+1)^2}\big)\leqslant\ln(1)=0$,

et $g_n(t)\geqslant\ln\big(\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\sin^2(t)\big)\geqslant\ln\big(\frac{1}{4}\sin^2(t)\big)$, et donc pour

tout $t\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $|g_n(t)|\leqslant-\ln\Big(\dfrac{\sin^2(t)}{4}\Big)=\ln(4)-\ln\big(\sin^2(t)\big)=\varphi(t)$,

et $\big(g_n(t)\big)^2\leqslant\big(\varphi(t)\big)^2=\psi(t)$.

Les fonctions φ et ψ étant intégrables sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on conclut alors grâce au théorème de convergence dominée, que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$\text{et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g_n(t)\right)^2\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\sin^2(t)\right)\right)^2\mathrm{d}t.$$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \pi\cdot\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = \pi\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\pi\ln(2)$,
et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t = -\tfrac{\pi}{2}\ln(2)$. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\sin^2(t)\right)\right)^2\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g_n(t)\right)^2\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\left(\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\right)^2 + \pi\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\right)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2}\\ &= \tfrac{\pi}{2}\left(\ln(2)\right)^2 + \pi\cdot\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\right)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[-1\,;1]$, on a $\dfrac{|x^{2k}|}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k^2}$, donc la série $\sum\dfrac{x^{2k}}{k^2}$ converge normalement, donc uniformément sur $[-1\,;1]$.
Comme la fonction $S:\begin{array}{rcl}[-1\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{k^2}\end{array}$ est continue,
et puisque $-1<\dfrac{b_n-a_n}{b_n+a_n}<1$ et $\dfrac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\right)^{2k}\cdot\frac{1}{k^2} = S\left(\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\sin^2(t)\right)\right)^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\ln(2)\right)^2 + \pi\cdot\frac{\pi^2}{6}\\ \Leftrightarrow\ & 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\sin^2(t)\right)\right)^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\ln(2)\right)^2 + \frac{\pi^3}{6}\\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\sin(t)\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left(\ln(2)\right)^2 + \frac{\pi^3}{24}.\end{aligned}$$

Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone (Leçon 423)

Exercice (1).

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0\,;1]\,,\mathbb{R}\big)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{a} n^2t^2e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t$.
   b) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{a} n^3t^2e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t$.
3. a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \ln(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler $\displaystyle\Big(\gamma = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big)$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{n}}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\mathrm{d}x$.

▶ **Corrigé.**–

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t^n)\end{array}$. Chaque fonc-

tion f_n est continue, et $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} f(0) & \text{si } t\in[0\,;1[\\ f(1) & \text{si } t=1 \end{cases} = F(t).$
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|f_n(t)| \leqslant ||f||_{[0\,;1]}$: la fonction constante égale à $||f||_{[0\,;1]}$ est intégrable sur $[0\,;1]$, donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = f(0).$$

2. a) Le changement de variable $u=nt$ donne :

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{n^2t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{na} \frac{u^2e^{-u^2}}{n\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)}\mathrm{d}u\cdot$$

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g_n :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$u \mapsto \begin{cases} \dfrac{u^2e^{-u^2}}{n\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)} & \text{si } u\in]-\infty\,;na] \\ 0 & \text{si } u>na \end{cases}$$
soit $g_n :\ u\mapsto \dfrac{u^2e^{-u^2}}{n\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)}\mathbb{1}_{]-\infty\,;na]}(u).$

Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et il est clair que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $g_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = g(u).$

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|g_n(u)| \leqslant u^2e^{-u^2} = \varphi(u)$. On vérifie facilement que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_{-\infty}^{n} a\frac{u^2e^{-u^2}}{n\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u = 0\cdot$$

b) Le changement de variable $u=nt$ donne :

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{n^3t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{na} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{n^2}}\mathrm{d}u\cdot$$

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $h_n :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
$$u \mapsto \begin{cases} \dfrac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{n^2}} & \text{si } u\in]-\infty\,;na] \\ 0 & \text{si } u>na \end{cases}$$

La fonction h_n est continue par morceaux et, pour tout $u\in\mathbb{R}$:

$$h_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a<0 \\ u^2e^{-u^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) & \text{si } a=0 \\ u^2e^{-u^2} & \text{si } a>0 \end{cases}.$$

En notant h la fonction limite dans chacun de ces trois cas : la fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et dans tous les cas, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$: $|h_n(u)| \leqslant u^2 e^{-u^2} = \varphi(u)$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_{-\infty}^{na} \frac{u^2 e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{n^2}} \mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u\cdot$$

On distingue trois cas :

- Si $a<0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = 0$.
- Si $a=0$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} h(u)\mathrm{d}u &= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 u\cdot ue^{-u^2}\mathrm{d}u\\ &= \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2}ue^{-u^2}\right]_A^0 + \frac{1}{2}\int_A^0 e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\\ &= 0+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-u^2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{par parité}\cdot\end{aligned}$$

- Si $a>0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Ainsi : $$\int_0^a \frac{n^3t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a<0\\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{4} & \text{si } a=0\\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{si } a>0\end{cases}$$

3. a) Soit, pôur $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n\\ 0 & \text{si } t>n\end{cases}\end{array}$,

soit $g_n : \; t \mapsto \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \cdot \ln(t)\mathbb{1}_{[0\,;n]}(t)$.
La fonction g_n est continue par morceaux, et $g_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}\ln(t)$, en effet, pour tout réel t fixé :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{-t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}.$$

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car :

- elle est continue sur $]0\,;+\infty[$,

- elle vérifie : $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, où ln est intégrable sur $]0\,;1]$
  (en effet : $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t)-t\Big]_\varepsilon^1 = -1-\varepsilon\ln(\varepsilon)+\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -1$).
- puisque $t^2e^{-t}\ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, alors φ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

On en déduit, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \ln(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

b) Le changement de variable $u = nt$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \ln(t)\mathrm{d}t &= n\int_0^1 (1-u)^n\ln(nu)\mathrm{d}u\\ &= n\ln(n)\int_0^1(1-u)^n\mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-u)^n\ln(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or : $\quad n\ln(n)\displaystyle\int_0^1(1-u)^n\mathrm{d}u = n\ln(n)\Big[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{n}{n+1}\ln(n)$,

et pour tout $\varepsilon\in]0\,;1[$, en commençant par une I.P.P. :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 (1-u)^n\ln(u)\mathrm{d}u &= \Big[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\Big]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}u\\ &= \frac{(1-\varepsilon)^{n+1}-1}{n+1}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1\Big(\sum_{k=0}^n (1-u)^k\Big)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\varepsilon^k\ln(\varepsilon) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\int_\varepsilon^1(1-u)^k\mathrm{d}u\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\int_0^1(1-u)^k\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

d'où : $\quad n\displaystyle\int_0^1(1-u)^n\ln(u)\mathrm{d}u = \frac{-n}{n+1}\sum_{k=0}^n\Big[\frac{-(1-u)^{k+1}}{k+1}\Big]_0^1 = \frac{-n}{n+1}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}$,

et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\ln(t)\mathrm{d}t &= \frac{n\ln(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{n}{n+1}\Big(\ln(n) - \Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\Big)\Big)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma, \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler}\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t = -\gamma.$

4. Soit, pour $n \geqslant 2$, la fonction $g_n : \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^{-\frac{1}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \end{array}.$

   La fonction g_n est continue, et :

   $$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g_n(x) = x^{-\frac{1}{n}}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\cdot e^{-x} = e^{-x}.$$

   De plus, pour tout entier $n \geqslant 2$:

   - Si $0 < x \leqslant 1$, alors $\left|g_n(x)\right| \leqslant x^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln(x)}{n}} \leqslant e^{-\frac{\ln(x)}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$,
   - et si $x > 1$:

   $$\begin{aligned}\left|g_n(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\dfrac{x}{n}\right)^k} \\ &\leqslant \frac{1}{1+x+\frac{n-1}{2n}x^2} \leqslant \frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}},\end{aligned}$$

   Soit pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \left|g_n(x)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \varphi(x).$

   La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de convergence dominée :

   $$\int_0^{+\infty} x^{\frac{-1}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1.$$

Exercice (2). Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t\right)$

1. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.

   b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{12}$.

2. Soit $f\in\mathcal{C}\big([0\,;1]\,;\mathbb{R}\big)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(t)\cdot n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t\right)$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Avec le changement de variable $u=t^n$ ($\Leftrightarrow t=u^{\frac{1}{n}}$), on obtient :

$$\int_0^1 t^n\ln(1+t)\mathrm{d}t=\int_{]0\,;1]} u^{\frac{1}{n}}\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u.$$

La fonction $u\mapsto u^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0\,;1]$. La suite de fonctions $\left(u\mapsto u^{\frac{1}{n}}\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et converge vers $\varphi:\ u\mapsto\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ qui est continue sur $]0\,;1]$.
Le théorème de limite monotone assure donc que :

$$\int_0^1 n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t=\int_0^1 u^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u.$$

b) Pour tout réel u de $]0\,;1[$, on a $\ln(1+u)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{u^n}{n}$, d'où :

$$\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{u^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}u.$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $u\mapsto(-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$ est continue sur $]0\,;1[$, et $\displaystyle\int_0^1\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{u^{n-1}}{n}\right|\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente. On peut donc échanger les symboles somme et intégrale, ce qui donne :

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{u^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{d}u\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

D'autre part :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

2. Soit $f\in\mathcal{C}\big([0\,;1]\,;\mathbb{R}\big)$. Par le même changement de variable $u=t^{\frac{1}{n}}$, on obtient :

$$\int_0^1 f(t)\cdot n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t=\int_{]0\,;1[} f\big(u^{\frac{1}{n}}\big)\cdot u^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u\cdot$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $u\mapsto f\big(u^{\frac{1}{n}}\big)\cdot u^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0\,;1[$ et : $\forall u\in]0\,;1[,\ f\big(u^{\frac{1}{n}}\big)\cdot u^{\frac{1}{n}}\dfrac{\ln(1+u)}{u}\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\cdot\dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

De plus : $\forall u\in]0\,;1[,\ \left|f\big(u^{\frac{1}{n}}\big)\cdot u^{\frac{1}{n}}\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right|\leqslant||f||_0\dfrac{\ln(1+u)}{u}=\varphi(u)$ où φ est intégrable sur $]0\,;1[$, donc par le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 f(t)\cdot n\ln(1+t^n)\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u=f(1)\cdot\frac{\pi^2}{12}\cdot$$

Exercice (3). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\mathrm{d}t\cdot$
   a) Montrer que : $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad nI_nI_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}\cdot$
   b) En déduire que : $\quad I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$
2. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t\right)\cdot$
   b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t=nI_{2n+1}\cdot$
   c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

▶ **Corrigé.**–

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{I.P.P.}{=} \underbrace{\Big[\sin(t)\cos^n(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^{n-1}\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(t)\big)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t = nI_{n-1} - nI_{n+1},
\end{aligned}$$

d'où : $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$, et par itération de cette relation :

$$(n+1)I_{n+1}I_n = nI_nI_{n-1} = \ldots = I_1I_0.$$

Comme $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ et $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, alors $I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1}\cdot(n+1)I_{n+1}I_n = nI_{n+1}I_n \leqslant nI_n^2 \leqslant nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2},$$

donc par encadrement, $nI_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et comme $I_n > 0$, alors :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases} \end{array}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue et :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{t^2}{n}+o(\frac{1}{n})\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2}.$$

De plus : $0 \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant e^{n\cdot\frac{-t^2}{n}} = e^{-t^2}$ pour tout $t \in [0\,;\sqrt{n}]$, donc la fonction f_n est continue par morceaux, et converge simplement vers la fonction $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t^2} \end{array}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$$

b) Le changement de variable $u = \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ (donc $\frac{t}{\sqrt{n}} = \sin(u)$) donne :

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\tfrac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2(u)\right)^n\cdot\sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u$$
$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}I_{2n+1}.$$

c) On conclut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \overset{2.\mathrm{a})}{=} \lim_{n\to+\infty}\int 80^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_{2n+1}$$
$$\overset{1.\mathrm{b})}{=} \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice (4). Un calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n}$.

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n}$.

▶ **Corrigé.**–

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ est continue sur $]0\,;1]$, et $\frac{t^{a-1}}{1+t^b} \underset{0}{\sim} t^{a-1}$.

   Comme $a-1 > -1$, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{a-1}\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t$ converge aussi (d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives).

   D'autre part, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{a+b\cdot n}$ converge.

Pour tout $t \in]0\,;1[$: $\quad \dfrac{1}{1+t^b} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^b)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{nb}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t &= \int_{]0\,;1[}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{a-1+nb}\Big)\mathrm{d}t\\ &= \int_{]0\,;1[}\lim_{n\to+\infty}\big(S_n(t)\big)\mathrm{d}t \quad \text{où } S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a-1+kb}\end{aligned}$$

Or :

- La fonction $t \mapsto S_n(t)$ est continue sur $]0\,;1[$.
- Pour tout $t \in]0\,;1[$, $S_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b} = g(t)$ avec g continue sur $]0\,;1[$.
- $\forall t \in]0\,;1[, |S_n(t)| \leqslant 1$ (série alternée qui vérifie le critère spécial) et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0\,;1[$.

Le théorème de convergence s'applique donc, qui donne :

$$\int_0^1\Big(\lim_{n\to+\infty}S_n(t)\Big)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t\Big).$$

Soit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a-1+kb}\Big)\mathrm{d}t\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big(\int_0^1 t^{a-1+kb}\mathrm{d}t\Big)\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+k\cdot b}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+k\cdot b}.\end{aligned}$$

2. D'après 1 : $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$

$$\begin{aligned}X^4+1 = X^4+1+2X^2-2X^2 &= (X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2\\ &= (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1).\end{aligned}$$

Il existe donc des réels a, b, c, d tels que :

$$F(X) = \frac{1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}.$$

Or F est paire ; $F(-X) = \dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{-aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \dfrac{-cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$, donc l'unicité de la décomposition en éléments simples donne : $\begin{cases} c = -a \\ d = b \end{cases}$.

De plus : $1 = F(0) = b + d = 2b$, donc $b = \frac{1}{2}$, donc :

$$F(X) = \frac{aX + \frac{1}{2}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} + \frac{-aX + \frac{1}{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1}.$$

Enfin : $\dfrac{1}{2} = F(1) = \dfrac{a + \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} + \dfrac{-a + \frac{1}{2}}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{2}a + 2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = -\sqrt{2}a + 1$,

donc $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4n} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{2t + 2\sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{2t - 2\sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t \cdot$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t + 2\sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t + \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \\
&= \Big[\ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) \Big]_0^1 + \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \ln(2 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + (\sqrt{2}t + 1)^2} \\
&= \ln(2 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\arctan(\sqrt{2}t + 1) \Big]_0^1 \\
&= \ln(2 + \sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2} + 1) - \tfrac{\pi}{2} \cdot
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t - 2\sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t - \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \Big[\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) \Big]_0^1 - 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + (\sqrt{2}t - 1)^2} \\
&= \ln(2 - \sqrt{2}) - 2 \Big[\arctan(\sqrt{2}t - 1) \Big]_0^1 \\
&= \ln(2 - \sqrt{2}) - 2 \arctan(\sqrt{2} - 1) - \tfrac{\pi}{2} \cdot
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + 2\big(\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan(\sqrt{2}-1)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot$$

On rappelle en effet que pour tout $x>0$: $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice (5). Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t$

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{n\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)}\mathrm{d}u\cdot$

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{4n^2\cdot\mathrm{sh}^2\big(\frac{u}{2n}\big)}\mathrm{d}u\cdot$

3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\cdot$

   On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot$

▶ **Corrigé.–**

1. Avec le changement de variable affine $u = nt$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{n\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)}\mathrm{d}u\cdot$$

Or pour tous $\varepsilon, A\in\mathbb{R}_+^*$, avec $\varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(u)}{n\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)}\mathrm{d}u = \left[\frac{1-\cos(u)}{n\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\big(1-\cos(u)\big)e^{\frac{u}{n}}}{n^2\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)^2}\mathrm{d}u \quad \text{(I.P.P.)}$$

$$= \frac{1-\cos(A)}{n\big(e^{\frac{A}{n}}-1\big)} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{n\big(e^{\frac{\varepsilon}{n}}-1\big)} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(u)}{n^2\big(e^{\frac{u}{n}}-1\big)^2\big(e^{-\frac{u}{2n}}\big)^2}\mathrm{d}u$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{\varepsilon\to0} 0 - 0 + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{n^2\big(e^{\frac{u}{2n}}-e^{-\frac{u}{2n}}\big)^2}\mathrm{d}u\cdot$$

En effet, $\displaystyle\frac{1-\cos(\varepsilon)}{n\big(e^{\frac{\varepsilon}{n}}-1\big)} = \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$.

La dernière intégrale est bien $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{4n^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{u}{2n}\right)}\mathrm{d}u\cdot$

2. On vérifie facilement que :

$$\frac{1-\cos(u)}{4n^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{u}{2n}\right)} \xrightarrow[u\to 0]{} \frac{1}{2} \text{ et } 0 < \frac{1-\cos(u)}{4n^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{u}{2n}\right)} \leqslant \frac{2}{u^2}\cdot$$

Or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$; de plus, pour tout $u>0$, $\dfrac{1-\cos(u)}{4n^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{u}{2n}\right)} = g_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} = g(u)$.

Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0\,;+\infty[$, de plus $|g_n(u)| \leqslant g(u)$ pour tout $u>0$, et g est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Le théorème de convergence dominée assure donc que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u\cdot$$

On ira alors voir à la leçon 436, exercice 1, comment l'on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice (6). Un lemme de Cantor

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx),$$

et on suppose que pour tout réel x, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On se propose alors de montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers 0.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\sin(nx) = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(b_n\sin(nx)\big)^2\mathrm{d}x$.
2. Conclure dans le cas où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
3. Dans le cas général, on pose $b'_n = \min(1, |b_n|)$.
   Vérifier que pour tout réel x, $b'_n\sin(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et conclure.

▶ **Corrigé.**–

1. On voit facilement que : $a_n = f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

   puis $b_n\sin(nx) = f_n(x) - a_n\cos(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{0}$ pour tout réel x.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \big(b_n \sin(nx)\big)^2 \mathrm{d}x &= b_n^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\big(1-\cos(2nx)\big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{b_n^2}{2}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{b_n^2}{2} \cdot 2\pi = \pi b_n^2 \cdot\end{aligned}$$

2. On sait donc que :

   i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \big(b_n \sin(nx)\big)^2$ est continue sur $[0\,;2\pi]$.

   ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(b_n \sin(nx)\big)^2 = 0$.

   iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\big(b_n \sin(nx)\big)^2\right| \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |b_n|^2$,

   donc d'après le théorème de convergence dominée :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \big(b_n \sin(nx)\big)^2 \mathrm{d}x = 0, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \pi b_n^2 = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

3. Dans le cas général, avec la définition de b'_n donnée par l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\big|b'_n \sin(nx)\big| = |b'_n| \cdot |\sin(nx)| \leqslant |b_n| \cdot |\sin(nx)| = |b_n \sin(nx)|,$$

   donc puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \sin(nx) = 0$, alors par encadrement on a bien :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b'_n \sin(nx) = 0.$$

   Comme la suite $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, alors d'après b) :

   $$\lim_{n\to+\infty} b'_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \min(1, |b_n|) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Exemples d'étude de fonction définie par une intégrale (Leçon 427)

Exercice (1).
Soit la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta \end{array}$.

1. Justifier que f est bien définie sur son domaine.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
4. En déduire que : $\quad f(x) = \begin{cases} 2\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$.
5. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout réel x : $\quad x^2 - 2\cos(x) + 1 = |x - e^{\mathrm{i}\theta}|^2 \geqslant 0$.
   Quant au cas d'égalité :
   $$\left(|x - e^{\mathrm{i}\theta}|^2 = 0\right) \Leftrightarrow \left(x = e^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } x \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1).$$
   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$, $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 > 0$ et la fonction $p : \begin{array}{rcl} [0\,;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \end{array}$ est définie, continue et donc intégrable sur $[0\,;\pi]$.
   Lorsque $x = 1$: la fonction $\theta \mapsto \ln\left(2 - 2\cos(\theta)\right)$ est continue sur $]0\,;\pi]$.

Au voisinage de zéro :

$$\ln\big(2-2\cos(\theta)\big)=\ln\big(\theta^2+o_0(\theta^2)\big)=2\ln(\theta)+\ln\big(1+o_0(1)\big).$$

Or pour $\varepsilon\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln(\theta)\mathrm{d}\theta&=\Big[\theta\ln(\theta)-\theta\Big]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\\&=\tfrac{\pi}{2}\ln\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\ln(\varepsilon)+\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\tfrac{\pi}{2}\ln\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(J'ai pris l'initiative de rédiger ainsi la preuve de la convergence de l'intégrale, plus simple que par comparaison non ?)

Donc l'intégrale $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\theta)\mathrm{d}\theta$ converge, et $2\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\theta)\mathrm{d}\theta$ aussi, et par conséquent $f(1)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(2-2\cos(\theta)\big)\mathrm{d}\theta$ est bien définie.

De même, la fonction $\theta\mapsto\ln\big(2+2\cos(\theta)\big)$ est continue sur $[0\,;\pi[$ et $\ln\big(2+2\cos(\theta)\big)=\ln\big(2-2\cos(\theta-\pi)\big)$ est intégrable au voisinage de π.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)\mathrm{d}\theta$ converge pour tout nombre réel x, et donc que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $\psi:\ (x,\theta)\mapsto\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le domaine $\big(\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}\big)\times[0\,;\pi]$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier l'hypothèse de domination pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Pour tout $x\in\big(\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}\big)\times[0\,;\pi]$: $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta)=\dfrac{2x-2\cos(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$.
   Soit $[a\,;b]$ un segment de $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, qui est donc inclus dans l'un des trois intervalles qui constitue ce domaine.
   La fonction $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ est continue, donc bornée sur le compact $[a\,;b]\times[0\,;\pi]$ et il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall(x,\theta)\in[a\,;b]\times[0\,;\pi]$: $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta)\right|\leqslant M$.
   La fonction constante $\theta\mapsto M$ est intégrable sur $[0\,;\pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

3. D'après 2, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\},\quad f'(x)=\int_0^{\pi}\frac{2x-2\cos(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\mathrm{d}\theta.$$

Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\big(\Leftrightarrow \theta = 2\arctan(t)\big)$ donne :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{2x - 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2 - 2x\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2+(x-1)}{\big((x-1)^2t^2+(x-1)^2\big)(t^2+1)}\mathrm{d}t\cdot
\end{aligned}$$

En notant $u = t^2$, on a :

$$\frac{(x+1)u+(x-1)}{\big((x+1)^2u+(x-1)^2\big)(u+1)} = \frac{A}{u+1}+\frac{B}{(x+1)^2u+(x-1)^2}.$$

où :

$$A = \frac{-(x+1)+(x-1)}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = \frac{-2}{-4x} = \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } B &= \frac{-(x+1)\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}+(x-1)}{-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}+1} = \frac{-(x-1)^2(x+1)+(x-1)(x+1)^2}{-(x-1)^2+(x+1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)(-x+1+x+1)}{4x} = \frac{x^2-1}{2x}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{x^2-1}{2x}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2x}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}t\right)^2} \\
&= \frac{1}{2x}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2x}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\left[\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\cdot t\right)\right]_0^{\varepsilon\cdot\infty} \\
&\text{où } \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases} \\
&= \frac{2}{x}\cdot\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{2\pi}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

4. D'après 3, il existe K_1, K_2, K_3 des réels tels que :

$$f(x) = \begin{cases} K_1 & \text{si } x \in]-1\,;1[\\ 2\pi\ln(x)+K_2 & \text{si } x \in]1\,;+\infty[\\ 2\pi\ln(-x)+K_3 & \text{si } x \in]-\infty\,;-1[\end{cases}.$$

où :

$$K_1 = f(0) = 0$$

$$K_2 = f(x) - 2\pi\ln(x) = \int_0^{\pi} \ln\Big(\frac{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}{x^2}\Big)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\Big(\big(\tfrac{1}{x}\big)^2 - \tfrac{2}{x}\cos(\theta) + 1\Big)\mathrm{d}\theta = K_1 = 0 \quad \text{si } x \in]1\,;+\infty[$$

et $K_3 = f(x) - 2\pi\ln(-x) = f(x) - \pi\ln(x^2) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\Big(\frac{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}{x^2}\Big)\mathrm{d}\theta$

$$= \int_0^{\pi} \ln\Big(\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{2}{x}\cos(\theta) + 1\Big)\mathrm{d}\theta = f\big(\tfrac{-1}{x}\big) = 0 \quad \text{si } x \in]-\infty\,;-1[.$$

Ainsi : $\quad f(x) = \begin{cases} 2\pi\ln\big(|x|\big) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}.$

5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 1, et soient les fonctions $h_n : \begin{array}{rcl} [0\,;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln\big(x_n^2 - 2x_n\cos(\theta) + 1\big) \end{array}$. Alors :

   - La fonction h_n est constante sur $]0\,;\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $h_n(\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big) = h(\theta)$, où h est constante sur $]0\,;\pi]$.
   - $h_n(\theta) = \ln\big(x_n^2 - 2x_n\cos(\theta) + 1\big) = \ln\Big(\big(x_n - \cos(\theta)\big)^2 + \sin^2(\theta)\Big)$, donc $h_n(\theta) \geqslant \ln\big(\sin^2(\theta)\big)$.

     Comme la suite (x_n) converge, alors elle est bornée et il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant M$, ce qui entraîne :

     $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n(\theta) \leqslant \ln(M^2 + 2M + 1) = 2\ln(M+1)$, puis :

     $\forall n \in \mathbb{N},\ |h_n(\theta)| \leqslant -\ln\big(\sin^2(\theta)\big) + 2\ln(M+1) = \varphi(\theta)$ avec φ intégrable sur $]0\,;\pi]$.

     Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

     $$f(1) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^{\pi} g_n(\theta)\mathrm{d}\theta\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0.$$

     Enfin, avec le changement de variable $\alpha = \pi - \theta$:

     $$f(-1) = \int_0^{\pi} \ln\big(2 + 2\cos(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln\big(2 - 2\cos(\alpha)\big)\mathrm{d}\alpha = f(1) = 0.$$

Exercice (2).
Soient les fonctions :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Justifier que les fonctions f et g sont bien définies sur leur domaine.
2. Montrer que : $\forall x > 0,\ f(x) = g(x)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

► **Corrigé.–**

1. Soit $x > 0$: la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et :
   $\forall t > 0,\ \left|\dfrac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$; comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Ensuite : $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} = \dfrac{1}{t+1}\cdot\dfrac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ se prolonge par continuité sur $]0\,;+\infty[$.
   De plus, $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ et comme pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \ln(t)\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$ converge aussi et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $\psi: \begin{array}{rcl}]0;+\infty[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine,
   et $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$.
   Soit $a > 0$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in 0\,;a[$:
   $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \varphi(t)$, où φ est intégrable sur $0\,;+\infty[$.
   Le théorème de dérivation sous le signe intégrale assure alors que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, avec :
   $$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\mathrm{d}t.$$
   Pour tout $u > 0$: $\quad \dfrac{1}{(u+1)(u+x^2)} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{B}{u+x^2}$, avec $A = \dfrac{1}{x^2-1}$

et $B = \dfrac{1}{-x^2+1}$, d'où pour tout $t > 0$:

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{t}{x^2+t^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x^2+t^2}\Big)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)} \cdot \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \Big(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{x^2+t^2}\Big)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)} \cdot \lim_{A\to+\infty} \Big[\ln\Big(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\Big)\Big]_0^A \\
&= \frac{1}{2(x^2-1)} \Big(\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \ln\Big(\frac{1+A^2}{x^2+A^2}\Big)}_{=0} - \ln\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \\
&= \frac{\ln(x)}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Enfin comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot$

D'autre part, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ se prolonge par continuité au voisinage de 1 et est intégrable au voisinage de 0, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}\cdot$$

Ainsi, $f' = g'$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = f(x) + c.$$

La fonction $h : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} \end{array}$ est continue, et :

$\forall x > 0,\ |h(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\quad f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = 0.$

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit : $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, par conséquent :

$$c=\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)-g(x)\big)=0,$$

et donc : $\quad \forall x>0,\ f(x)=g(x)$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0\,;+\infty[$ qui tend vers $+\infty$, et soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $r_n:\begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\end{array}$.

   Alors :

   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction r_n est continue sur son domaine.
   - Pour tout $t\in]0\,;+\infty[$: $r_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}(1+t^2)$.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in]0\,;+\infty[$: $|r_n(t)|\leqslant\frac{\pi}{2}(1+t^2)=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   Par conséquent : $\quad\displaystyle\int_0^{+\infty} r_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi^2}{4}$.

   D'où : $\quad g(x)=f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice (3).
Soient les fonctions $f: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{array}$.

1. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $f' + 2g' \cdot g = 0$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $h: \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc la fonction $f: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$
D'autre part, comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $g: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = e^{-x^2}$ pour tout réel x.

2. Pour tout réel x, avec le changement de variable $u = tx$:
$$f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\mathrm{d}t = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2g'(x) \cdot g(x) = 0$, ce qui prouve que la fonction $x \mapsto f(x) + \big(g(x)\big)^2$ est constante.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \big(g(x)\big)^2 = f(0) + \big(g(0)\big)^2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + 0 = \frac{\pi}{4}$.

D'autre part, pour tout réel x :
$$0 \leqslant f(x) = e^{-x^2}\int_0^1 \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant e^{-x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-x^2},$$
où $\dfrac{\pi}{4} \cdot e^{-x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ce qui prouve que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par encadrement.

Ainsi : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) + \big(g(x)\big)^2 = \lim_{x \to +\infty} \big(g(x)\big)^2$, et comme pour tout $x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0$ alors :

$$g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad \text{soit :} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice (4). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ $(\alpha \in]0\,;1[)$

Soit $\alpha \in]0\,;1[$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction $\begin{array}{rcl} f:]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}} \end{array}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Soit la fonction $\begin{array}{rcl} g:]-\pi\,;\pi[& \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t \end{array}$.

   Montrer que g est dérivable sur son domaine, et que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$:

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\mathrm{d}t, \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} h:]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^{\alpha}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}} \end{array}.$$

   En déduire alors que g est constante sur $]-\pi\,;\pi[$.
3. Montrer que, pour tout $\theta \in]0\,;\pi[$

$$\begin{aligned} g(\theta)\sin(\alpha\theta) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}\alpha\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}\alpha\theta}\Big) \\ &= \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   En déduire alors que :

$$g(\theta)\sin(\alpha\theta) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\big)^{\alpha}}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

4. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0\,;\pi[$ qui converge vers π.

   Montrer que : $\quad g(\theta_n)\sin(\alpha\theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$, et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

► **Corrigé.–**

Soit $\alpha \in]0\,;1[$.

1. La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ et on a $f(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}$ où $\alpha-1>-1$, donc la fonction f est intégrable sur $]0\,;1]$.

   De plus, $\left|f(t)\right|=\left|\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{|t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}|-1}=\dfrac{t^{\alpha-1}}{t-1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ où $2-\alpha>1$, donc f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Finalement, la fonction f est bien intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

2. Soit la fonction $s:\ \begin{array}{rcl}]-\pi\,;\pi[\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ (\theta,t) & \mapsto & \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}} \end{array}$: s est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[\times]0\,;+\infty[$, et $\dfrac{\partial s}{\partial\theta}(\theta,t)=\dfrac{-\mathrm{i}t^{\alpha}\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}{|1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}|^2}$.

   Pour tout $\beta\in]0\,;\pi[$ et pour tout $\theta\in[-\beta\,;\beta]$:

   $$\left|\frac{\partial s}{\partial\theta}(\theta,t)\right|=\frac{t^{\alpha}}{|1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}|^2}=\frac{t^{\alpha}}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\leqslant\frac{t^{\alpha}}{t^2+2t\cos(\beta)+1}=\varphi(t)$$

   où φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ (cette fonction est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $\varphi\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ avec $2-\alpha>1$).

   Ainsi, par le théorème de dérivation sur le signe intégrale, on a :

   $$r'(\theta)=-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}}{(1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta})^2}\mathrm{d}t \quad \text{où } r:\ \begin{array}{rcl}]-\pi\,;\pi[& \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t \end{array}.$$

   On en déduit que g est dérivable sur $]-\pi\,;\pi[$ comme produit de fonctions qui le sont, avec pour tout $\theta\in]-\pi\,;\pi[$:

   $$\begin{aligned} g'(\theta)&=\mathrm{i}\alpha e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t-e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cdot\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}}{(1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta})^2}\mathrm{d}t\\ &=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^{\alpha-1}(1+t\cdot e^{\mathrm{i}\alpha t})-e^{\mathrm{i}\theta}\cdot t^{\alpha}}{(1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta})^2}\mathrm{d}t\\ &=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cdot\int_0^{+\infty}h'(t)\mathrm{d}t\\ &=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cdot\Big(\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}h'(t)\mathrm{d}t\Big)=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cdot\big(\lim_{A\to+\infty}h(A)-h(0)\big)=0\\ &\text{car } g(0)=0 \text{ et } g(A)\xrightarrow[A\to+\infty]{}0. \end{aligned}$$

   On en déduit que g est constante sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$.

3. La fonction g étant constante sur $]-\pi\,;\pi[$:

pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, $g(\theta)=g(-\theta)$ et par ailleurs :

$$\begin{aligned}
g(\theta)\sin(\alpha\theta) &= g(\theta)\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\alpha\theta}-e^{-\mathrm{i}\alpha\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{g(-\theta)e^{\mathrm{i}\alpha\theta}-g(\theta)e^{-\mathrm{i}\alpha\theta}}{2\mathrm{i}}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{-\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t\Big)\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta})}{(1+t\cdot e^{\mathrm{i}\theta})(1+t\cdot e^{-\mathrm{i}\theta})}\mathrm{d}t\\
&= \sin(\theta)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha}}{1+\left(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin(\theta)}\\
&= \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{\big(u\cdot\sin(\theta)-\cos(\theta)\big)^{\alpha}}{1+u^2}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u=\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

4. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$g(\theta_n)\sin(\alpha\theta_n)=\int_{\mathrm{cotan}(\theta_n)}^{+\infty}\frac{\big(u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n)\big)^{\alpha}}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)\mathrm{d}u,$$

où on a défini $\psi_n :\ \mathbb{R}\to\ \mathbb{R}$.

$$u\mapsto\begin{cases}\dfrac{\big(u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n)\big)^{\alpha}}{1+u^2} & \text{si } \mathrm{cotan}(\theta_n)\leqslant u\\ 0 & \text{si } u<\mathrm{cotan}(\theta_n)\end{cases}$$

Avec cette définition :

- La fonction ψ_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\psi_n(u)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{1+u^2}=\psi(u)$ où ψ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\big|\psi_n(u)\big|\leqslant\dfrac{1}{1+u^2}=\psi(u)$ avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$g(\theta_n)\cdot\sin(\alpha\theta_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\pi\cdot$$

De plus comme g est constante sur $]-\pi\,;\pi[$, alors $g(\theta_n)=g(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t$; comme par ailleurs, $\sin(\alpha\theta_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sin(\pi\alpha)$, alors :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\cdot$$

Exercice (5).
Soit la fonction $\Gamma: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to &]0;+\infty[\\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t \end{array}$.

1. Justifier la bonne définition de Γ sur son domaine et montrer que :
$$\forall x>0,\quad \Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)\quad \text{puis que}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n)=(n-1)!$$
2. Montrer que les fonctions Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes.
3. Soit $x>0$. Montrer que :

a) $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t\right)$.

b) $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)$.

c) $\Gamma(x)=\dfrac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\cdot\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}\right)$

où $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$ est la constante d'Euler.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout réel x, la fonction $h:\ t\mapsto e^{-t}\cdot t^{x-1}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Au voisinage de 0 : $e^{-t}\cdot t^{x-1}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, fonction intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x-1>-1\Leftrightarrow x>0$ (critère de Riemann).
Au voisinage de $+\infty$: $t^2\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}=e^{-t}t^{x+1}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ par croissances comparées, donc $h(t)=o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc h est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ pour tout réel x.

Le domaine de définition de la fonction Γ est donc $]0\,;+\infty[$.
Ensuite, pour tout $x>0$ et pour tous $\varepsilon, A\in]0\,;+\infty[$ tels que $\varepsilon<A$:
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A e^{-t}\cdot t^x\mathrm{d}t &= \Big[e^{-t}\cdot t^x\Big]_\varepsilon^A + x\cdot\int_\varepsilon^A e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t \qquad \text{(I.P.P.)}\\ &= e^{-A}\cdot A^x + e^{-\varepsilon}\cdot t^\varepsilon + x\cdot\int_\varepsilon^A e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t\\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{\varepsilon\to 0} 0+0+x\cdot\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Ceci prouve la relation : $\quad\forall x\in]]0\,;+\infty[,\ \Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\cdot\Gamma(n-2)$$
$$= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!$$

En effet : $\quad \Gamma(1) = \lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A e^{-t}\mathrm{d}t = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}+1\right) = 1.$

2. La fonction $g:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & e^{-t}\cdot t^{x-1}\end{array}$ admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre $k\in\mathbb{N}^*$, et on a :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \left(\ln(t)\right)^k\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}.$$

La fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$; pour tous réels a,b de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a<b$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[a\,;b]$:

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|\left(\ln(t)\right)^k\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}\right| \leqslant \left|\ln(t)\right|^k\cdot e^{-t}\cdot\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right) = \varphi_{a,b}(t)\cdot$$

La fonction $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale : la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty}\left(\ln(t)\right)^k\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

En particulier : $\quad \forall x>0,\ \Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\ln(t)\right)^2\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t > 0,$

et donc Γ est convexe.

Ensuite, pour tout $x>0$: $\left(\ln\circ\Gamma\right)''(x) = \dfrac{\Gamma''(x)\cdot\Gamma(x)-\left(\Gamma'(x)\right)^2}{\left(\Gamma(x)\right)^2}\cdot$

Les fonctions $r:\begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \sqrt{e^{-t}\cdot t^{x-1}}\end{array}$ et $s:\begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \ln(t)\cdot\sqrt{e^{-t}\cdot t^{x-1}}\end{array}$ sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ (facile à vérifier), donc d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty} r(t)\cdot s(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty}\left(r(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\left(s(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\int_0^{+\infty}\ln(t)\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\left(\ln(t)\right)^2\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}\mathrm{d}t\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\Gamma'(x)\right)^2 \leqslant \Gamma(x)\cdot\Gamma''(x).$$

On en déduire que pour tout $x > 0$, $\big(\ln\circ\Gamma\big)''(x) \geqslant 0$, et donc que la fonction $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

3. a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit la fonction $h_n :\ ]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\cdot\big(1-\frac{t}{n}\big)^n & \text{si } 0<t\leqslant n \\ 0 & \text{si } t>n \end{cases}$$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$:

- la fonction h_n est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
- pour tout $t>0$: pour n assez grand, $n\geqslant t$ et $h_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}\cdot t^{x-1} = h(t)$.
- $|h_n(t)| = h_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-1} = \ell(t)$ avec ℓ intégrable sur $]0\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^n t^{x-1}\cdot\big(1-\tfrac{t}{n}\big)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

b) Avec le changement de variable $t = n\cdot u$:

$$\int_0^n t^{x-1}\cdot\big(1-\tfrac{t}{n}\big)^n = \int_0^1 (n\cdot u)^{x-1}\cdot(1-u)^n\cdot n\mathrm{d}u = n^x\cdot\int_0^1 u^{x-1}\cdot(1-u)^n\mathrm{d}u.$$

Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $x>0$,

$$\int_0^1 u^{x-1}\cdot(1-u)^n\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Initialisation.– Pour $n=0$: $\forall x>0$, $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

Hérédité.– Supposons la propriété vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$.

Au rang suivant $n+1$, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^{x-1}\cdot(1-u)^{n+1}\mathrm{d}u &\underset{\text{(I.P.P.)}}{=} \left[\frac{u^x}{x}\cdot(1-u)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x}\cdot\int_0^1 u^x\cdot(1-u)^n\mathrm{d}u \\ &= \frac{n+1}{x}\cdot\int_0^1 u^x\cdot(1-u)^n\mathrm{d}u \\ &= \frac{n+1}{x}\cdot\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}.\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire, et finalement vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-t)^n \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \cdot e^{x\ln(n)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{x}{k}}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right)} \cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{k} + x\cdot\ln(x)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}\right) \cdot e^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)\cdot x}.\end{aligned}$$

Or : $\quad e^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)\cdot x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\gamma\cdot x}$, donc pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \to +\infty} e^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)\cdot x} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma\cdot x} \cdot \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}\right).\end{aligned}$$

Exercice (6). Un calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$

Soient les fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\mathrm{d}t \end{array} \qquad \text{et } g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. a) Justifier la bonne définition de f et de g, et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t.$$

   b) Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elles sont solutions de l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que $f - g$ est périodique sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   d) Conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t+x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Soient ε et A des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ avec $\varepsilon < A$. On a :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t+x)}{t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t+x}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t \quad \text{(I.P.P.)} \\ &= \frac{1-\cos(A)}{A+x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon+x} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon+x} \leqslant \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

donc $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{x+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$; d'autre part $\dfrac{1-\cos(A)}{A+x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$.

Par ailleurs, la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et $h_x(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{(t+x)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \end{cases}$,

et pour $t \geqslant 1$: $\quad 0 \leqslant h_x(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, donc la fonction h_x est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t$ converge, et la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Ensuite, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$; comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge, et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) La fonction $h :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-\cos(t)}{(t+x)^2} \end{array}$ est continue et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \big|h(x,t)\big| = \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$; le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre assure donc que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De même, la fonction $r :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{array}$ est continue et :

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \big|r(x,t)\big| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \psi(t),$$

où ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; on en déduit de même que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ensuite : soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \geqslant a$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-2\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^3}\right| \leqslant \frac{4}{(t+a)^3} = \varphi_1(t)$$

$$\text{et } \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{6\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^4} \leqslant \frac{12}{(t+x)^4} = \varphi_2(t).$$

Comme les fonctions φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{6\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^4}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{6\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^4}\mathrm{d}t\cdot$$

Or pour tout $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A \frac{6\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^4}\mathrm{d}t = \left[\frac{-2\big(1-\cos(t)\big)}{(t+x)^3}\right]_0^A + \int_0^A \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}\mathrm{d}t\cdot$$

et de la même façon :

$$\int_0^A \frac{2\sin(t)}{(t+x)^4}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\sin(t)}{(t+x)^2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t\cdot$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^A - f(x) = \frac{1}{x} - f(x), \end{aligned}$$

et donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) + f(x) = \dfrac{1}{x}.$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \geqslant a$:

$$\left|\frac{\partial r}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2}e^{-at} \leqslant \frac{1}{2}e^{-at} = \psi_1(t),$$

$$\text{et } \left|\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = 2\psi_1(t)\cdot$$

Comme ψ_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - g(x),$$

soit : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(x) + g(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

c) De b), on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f-g)''(x) + (f-g)(x) = 0$, donc il existe deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (f-g)(x) = A\cos(x) + B\sin(x),$$

et la fonction $f-g$ est bien périodique, de période 2π. D'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \big|f(x)\big| = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} = \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

$$\text{et } \left|g(x)\right| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) - g(x) = f(x+2n\pi) - g(x+2n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d) Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \arctan(A) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

et donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a pour tout $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{|\sin(t)|}{t+x}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^A \frac{\sin^2(t)}{t+x}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1-\cos(2t)}{t+x}\mathrm{d}t.$$

or :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\cos(2t)}{t+x}\mathrm{d}t &\overset{I.P.P.}{=} \left[\frac{\sin(2t)}{2(t+x)}\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin(2t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2(1+x)}, \end{aligned}$$

où : $\dfrac{|\sin(2t)|}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(t+x)^2}$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)^2}$ intégrable sur $[1\,;+\infty[$, et $\displaystyle\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+x} = \ln(A+x) - \ln(1+x) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$: on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin(t)|}{t+x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires (Leçon 428)

Exercice (1).

1. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_1):\ \sin(t)\cdot y'(t)-2\cos(t)\cdot y(t)=0.$$

   Que peut-on dire de la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_2):\ x^2\cdot y''(x)-4x\cdot y'(x)+(x^2+6)\cdot y(x)=0.$$

   a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en séries entières.

   b) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $k\in\mathbb{Z}$ quelconque, sur l'intervalle $I_k=]k\pi\,;(k+1)\pi[$:
   l'équation différentielle $y'(t)=2\cdot\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}\cdot y(t)$ a pour solution la fonction $y_k:\ t\mapsto\lambda_k\cdot e^{\int 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t}=\lambda_k\cdot e^{2\ln(|\sin(t)|)}=\lambda_k\cdot\sin^2(t)$ (où $\lambda_k\in\mathbb{R}$).

On vérifie alors facilement que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$x_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \sin^2(t) & \text{si } t \in]k\pi\,;(k+1)\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

est une solution de $(\mathcal{H}_1)$.
En effet, x_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;(k+1)\pi\}$, et on a clairement $x_k(k\pi) = x_k'(k\pi) = 0$.

Il reste à vérifier assez facilement que la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre : par conséquent, $\dim\big(S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})\big) = +\infty$, où $S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$ est l'espace des solutions de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On résout ici l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}_2) : \ x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2+6)\cdot y(x) = 0.$$

   a) Supposons que $(\mathcal{H}_2$ possède une solution développable en série entière : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (de rayon de convergence $R > 0$), alors pour tout x tel que $|x| < R$:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

   Ainsi, pour tout x tel que $|x| < R$:

$$\begin{aligned} & 0 = x^2 \cdot y''(x) - 4x\cdot y'(x) + (x^2+6)\cdot y(x) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (x^2+6)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1)-4n\big)a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n^2-5n+6)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6a_0 + 2a_1\cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big((n^2-5n+6)a_n + a_{n-2}\big)x^n. \end{aligned}$$

   On en déduit :

$$a_0 = a_1 = 0 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 2,\ (n^2-5n+6)a_n + a_{n-2} = 0.$$

   Or $(n^2-5n+6) = (n-2)(n-3)$, donc pour $n = 2$ et $n = 3$ on a : $0 \cdot a_n + 0 = 0$, qui est toujours vrai, tandis que pour tout entier $n \geqslant 4$: $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n-2)(n-3)}$, qui s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{2n(2n-1)} \text{ et } a_{2n+3} = \frac{-a_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Une récurrence facile donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot a_2 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot a_3,$$

d'où la forme générale des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière :

$$\begin{aligned} y(x) &= a_2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-2)!} + a_3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_3 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \cos(x) + a_3 \cdot x^2 \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Remarquons que le rayon de convergence de ces solutions est infini. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière, est donc $\text{Vect}(y_1, y_2)$, où $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \cdot \cos(x) \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \cdot \sin(x) \end{array}$.

b) L'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou $I_2 =]0\,;+\infty[$ est de dimension 2 et comme y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$, ces fonctions sont aussi solutions de l'équation différentielle sur I_1 et sur I_2. On en déduit :

$$S_{\mathcal{H}_2}\big(]-\infty\,;0[\big) = \text{Vect}(y_1, y_2) \text{ et } S_{\mathcal{H}_2}\big(]0\,;+\infty[\big) = \text{Vect}(y_1, y_2).$$

Par conséquent, si y est solution de $\mathcal{H}_2$ sur $\mathbb{R}$, alors y est solution de $(\mathcal{H}_2)$ sur I_1 et sur I_2, donc il existe des réels $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0\,;+\infty[: &\quad y(x) = \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot x^2 \sin(x), \\ \text{et } \forall x \in]0\,;+\infty[: &\quad y(x) = \lambda_2 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_2 \cdot x^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Or sur $]-\infty\,;0[$:

$$y'(x) = \lambda_1 \cdot 2x\cos(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \sin(x) + \mu_1 \cdot 2x \sin(x) + \mu_1 \cdot x^2 \cos(x)$$

et $$y''(x) = \lambda_1 \cdot 2\cos(x) - \lambda_1 \cdot 4x \sin(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot 2\sin(x) + \mu_1 \cdot 4x\cos(x) - \mu_1 \cdot x^2 \sin(x).$$

D'où : $\quad y(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0,\; y'(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 2\lambda_1$.

De même : $\quad y(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0,\; y'(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 2\lambda_2$.

On peut donc recoller les solutions au point 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$S_{\mathcal{H}_2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(z_1, z_2, z_3),$$

où :

$$z_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\cos(x) \end{array},\quad z_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{et } z_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ x^2\sin(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice (2).

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et soit l'équation

$$(E) :\; y''(x) - 4y(x) = a|x| + b.$$

Montrer que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont la courbe admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$, et déterminer cette solution.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ monotone, admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) :\; y'' + y = f,$$

sont bornées.

▶ **Corrigé.**–

1. L'équation homogène associée à (E) est $(H) :\; y''(x) - 4y(x) = 0$, dont l'espace des solutions est $\mathcal{S}_H = \left\{\lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
On résout (E) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, et on essaie de recoller en 0.
   - Sur $\mathbb{R}_+$: l'équation devient $y''(x) - 4y(x) = ax + b$, dont une solution particulière est clairement $y_p^+ :\; x \mapsto -\frac{1}{4}(ax + b)$.
   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont donc les fonctions de la forme :
   $$y_+ :\; x \mapsto \lambda_+ e^{2x} + \mu_+ e^{-2x} - \tfrac{a}{4}x - \tfrac{b}{4} \quad (\lambda_+, \mu_+ \in \mathbb{R}).$$
   - Sur $\mathbb{R}_-$, l'équation devient $y''(x) - 4y(x) = -ax + b$, dont une solution particulière évidente est $y_p^- :\; x \mapsto \frac{1}{4}(ax - b)$ ·

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y_- : \ x \mapsto \lambda_- e^{2x} + \mu_- e^{-2x} + \tfrac{a}{4}x - \tfrac{b}{4} \quad (\lambda_-, \mu_- \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $\lambda_+, \mu_+, \lambda_-, \mu_-$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{2x} + \mu_+ e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- e^{2x} + \mu_- e^{-2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Comme on veut que la courbe de y admette une asymptote en $+\infty$, alors $\lambda_+ = 0$ et de même une asymptote en $-\infty$ impose $\mu_- = 0$, ce qui réduit l'expression de la solution à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \mu_+ e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- e^{2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

La continuité au point 0 de la solution y implique :

$$\mu_+ - \tfrac{b}{4} = \lambda_- - \tfrac{b}{4}, \text{ soit } \mu_+ = \lambda_-.$$

On note λ cette valeur commune, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda e^{2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases},$$

donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ y'(x) = \begin{cases} -2\lambda e^{-2x} - \frac{a}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\lambda e^{2x} + \frac{a}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$

La dérivabilité de la solution y au point 0 implique :

$$-2\lambda - \tfrac{a}{4} = 2\lambda + \tfrac{a}{4}, \text{ soit } \lambda = -\tfrac{a}{8},$$

Avec ces valeurs : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ y''(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2}e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{a}{2}e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$

de sorte que y' est dérivable en 0. On en déduit que la fonction

$$y : \ x \mapsto \begin{cases} -\frac{a}{8}e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\frac{a}{8}e^{2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = -\tfrac{a}{8}e^{-2|x|} - \tfrac{a}{4}|x| - \tfrac{b}{4},$$

est l'unique solution de (E) qui admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On considère maintenant l'équation différentielle $(E) : \ y'' + y = f$. L'équation homogène associée est $(H) : \ y'' + y = 0$, donc l'espace des solutions est $\mathcal{S}_H = \{\lambda \cdot \cos + \mu \cdot \sin \,; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

   On adopte ici une approche matricielle en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, de sorte que $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y+f \end{pmatrix}$, qui s'écrit sous la forme

$$(E_1):\ Y' = AY + B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

L'équation homogène associée est $(H_1):\ Y' = AY$, dont $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes.
Les solutions de (H_1) sont dont de la forme :

$$\lambda_1 \cdot H_1 + \lambda_2 \cdot H_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que l'espace des solutions de (H_1) est l'ensemble des fonctions $t \mapsto M(t)\Lambda$, où $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.
On utilise maintenant la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E_1), en posant : $Y_p(t) = M(t)\Lambda(t)$, où $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$. Pour tout réel positif t :

$$\begin{aligned} Y_p'(t) &= M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) \\ &= AM(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) \\ &\text{car } M'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY_1(t) & AY_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = AM(t) \\ &= AY_p(t) + M(t)\Lambda'(t). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M(t)\Lambda'(t) = Y_p'(t) - AY_p(t) = B(t), \text{ soit } \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \cos(t)\lambda_1'(t) + \sin(t)\lambda_2'(t) = 0 \\ \text{et } -\sin(t)\lambda_1'(t) + \cos(t)\lambda_2'(t) = f(t) \end{cases},$$

ce qui donne : $\lambda_1'(t) = -f(t)\sin(t)$ et $\lambda_2'(t) = f(t)\cos(t)$.
On peut alors choisir, par exemple :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda_1(t) = \int_0^t -f(x)\sin(x)\mathrm{d}x \text{ et } \lambda_2(t) = \int_0^t f(x)\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Avec $Y_p(t) = \begin{pmatrix} y_p(t) \\ y_p'(t) \end{pmatrix}$, on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y_p(t) = \lambda_1(t)\cos(t) + \lambda_2(t)\sin(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \Big(-\int_0^t \sin(u)f(u)\mathrm{d}u\Big)\cos(t) + \Big(\int_0^t \cos(u)f(u)\mathrm{d}u\Big)\sin(t)\\
&= \int_0^t f(u)\big(\sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)\big)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$y:\ t \mapsto \lambda\cdot\cos(t) + \mu\cdot\sin(t) + \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u, \quad \text{où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Pour montrer qu'une solution quelconque y est bornée, il suffit donc de le prouver pour la solution particulière y_p trouvée ci-dessus.
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut réaliser une intégration par parties dans $y_p(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y_p(t) &= \Big[f(u)\cos(t-u)\Big]_0^t - \int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u\\
&= f(t) - f(0)\cos(t) - \int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or f est continue et admet une limite finie en $+\infty$: elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Notons M un réel positif tel que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f(t)| \leqslant M$.
Est-il vraiment nécessaire de redonner la preuve, élémentaire, ici ?
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\Big|\int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u\Big| \leqslant \Big|\int_0^t |f'(u)|\mathrm{d}u\Big|,$$

et comme f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, alors f' garde un signe constant sur l'intervalle, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \Big|\int_0^t |f'(u)|\mathrm{d}u\Big| = \Big|\int_0^t f'(u)\mathrm{d}u\Big| &= \big|f(t) - f(0)\big|\\
&\leqslant |f(t)| + |f(0)| \leqslant 2M.
\end{aligned}$$

De tout ceci, on déduit bien que les solutions de (E) sont toutes bornées.

Exercice (3).

Soit la série entière $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Déterminer son rayon de convergence, et montrer que sa somme vérifie sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(x)+y'(x)+y(x)=e^x.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

► **Corrigé.**–

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $u_n = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \neq 0$: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc le rayon de convergence de cette série entière est $R=+\infty$.

Soit alors la fonction somme $S : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \end{array}$. On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}.$$

Ainsi :

$$S(x)+S'(x)+S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{3n}}{(3n)!} + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

L'équation du second degré $T^2+T+1=0$ admet deux solutions complexes conjuguées $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les solutions de l'équation homogène $S''(x)+S'(x)+S(x)=0$ sont de la forme : $e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$, où λ et μ sont deux réels.

En vérifiant facilement que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^x$ est une solution particulière de l'équation (E), on obtient la forme générale des solutions de cette équation différentielle :

il existe λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$.

De plus : $S(0) = 1 = \lambda + \frac{1}{3}$, donc $\lambda = \frac{2}{3}\cdot$
Par ailleurs, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} S'(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\Big(\lambda\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big) + \mu\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)\Big) \\ + e^{-\frac{x}{2}}\Big(-\lambda\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big) + \mu\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big) + \tfrac{1}{3}e^{x}, \end{aligned}$$

donc : $S'(0) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu + \frac{1}{3}$, et d'autre part $S'(0) = 0$.
Puisque $\lambda = \frac{2}{3}$, alors $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\big(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\big) = 0$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \tfrac{1}{3}e^{x} + \tfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)\cdot$$

Exercice (4). Équation de Hill

Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}) : \quad y'' + q \cdot y = 0,$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, périodique de période $T > 0$.

1. Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 de $(\mathcal{H})$ telles que : $\begin{cases} y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 1 \end{cases}$, que l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ est $S_{\mathcal{H}} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, et montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t) = 1.$$
2. Montrer que si y est une solution de $(\mathcal{H})$, alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} y_1(t+T) &= y_1(T) \cdot y_1(t) + y_1'(T) \cdot y_2(t) \\ \text{et} & \\ y_2(t+T) &= y_2(T) \cdot y_1(t) + y_2'(T) \cdot y_2(t) \end{cases}.$$
3. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$.
Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) L'équation $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle qui vérifie :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu \cdot y'(t).$$
   (ii) Le réel μ est solution de l'équation d'inconnue x :
   $$x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big) \cdot x + 1 = 0.$$
   (iii) L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle telle que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} \cdot u(t),$$
   où u est une fonction T-périodique.

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, donc étant donné $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(0) = \alpha \text{ et } y'(0) = \beta \end{cases}$, et assure aussi que cette solution est globale (définie sur $\mathbb{R}$, donc).
L'existence et l'unicite des solutions y_1 et y_2 demandées par l'énoncé

sont donc garanties ; ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t),$$

d'où, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1(t)y_2''(t) + y_1'(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2'(t) - y_1''(t)y_2(t) \\ &= y_1(t)\big(-q(t)y_2(t)\big) - \big(-q(t)y_1(t)\big)y_2(t) = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que w est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $w(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, alors $w(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce déterminant n'étant jamais nul, les fonctions y_1 et y_2 sont par conséquent linéairement indépendantes.
On sait de plus, d'après le cours, que l'espace des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2, donc :

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(y_1, y_2).$$

2. Avec une solution y de (H), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t+T) + q(t+T)y(t+T) = 0 \Leftrightarrow y''(t+T) + q(t)y(t+T) = 0,$$

car q est T-périodique ; cela prouve que la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est solution de (H), donc élément de $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.
En particulier, les fonctions $t \mapsto y_1(t+T)$ et $t \mapsto y_2(t+T)$ sont solutions de (H), donc il existe c_1, c_2, d_1, d_2 quatre réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t+T) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) \text{ et } y_2(t+T) = d_1 \cdot y_1(t) + d_2 \cdot y_2(t).$$

Par dérivation de ces relations, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1'(t+T) = c_1 \cdot y_1'(t) + c_2 \cdot y_2'(t) \text{ et } y_2'(t+T) = d_1 \cdot y_1'(t) + d_2 \cdot y_2'(t).$$

En particulier pour $t = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &y_1(T) = c_1 \cdot y_1(0) + c_2 \cdot y_2(0) = c_1\,; \quad y_2(T) = d_1 \cdot y_1(0) + d_2 \cdot y_2(0) = d_1\,; \\ &y_1'(T) = c_1 \cdot y_1'(0) + c_2 \cdot y_2'(0)\,; \quad y_2'(T) = d_1 \cdot y_1'(0) + d_2 \cdot y_2'(0) = d_2. \end{aligned}$$

Ainsi : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t+T) &= y_1(T)y_1(t) + y_1'(T)y_2(t) \\ y_2(t+T) &= y_2(T)y_1(t) + y_2'(T)y_2(t) \end{cases}.$

3. Montrons que les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.

$$(i) \Leftrightarrow \big(\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = \mu \cdot y(t)\big).$$

Or, d'après les résultats précédents :

$$\big(y(t+T) = \mu y(t)\big) \Leftrightarrow \Big(\alpha y_1(t+T) + \beta y_2(t+T) = \mu\big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\big(y_1(T)y_1(t) + y_1'(T)y_2(t)\big) + \beta\big(y_2(T)y_1(t) + y_2'(T)y_2(t)\big) = \alpha\mu y_1(t) + \beta\mu y_2(t)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big(y_1(T)-\mu\big)\alpha + y_2(T)\beta\Big)y_1(t) + \Big(y_1'(T)\alpha + \big(y_2'(T)-\mu\big)\beta\Big)y_2(t) = 0.$$

Les fonctions y_1 et y_2 étant linéairement indépendantes : la proposition (i) est équivalente au fait qu'il existe $(\alpha\,,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que

$$\begin{cases} \big(y_1(T)-\mu\big)\alpha + y_2(T)\beta & = 0 \\ y_1'(T)\alpha + \big(y_2'(T)-\mu\big)\beta & = 0 \end{cases}.$$

Matriciellement, cela s'écrit : $\begin{pmatrix} y_1(T)-\mu & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T)-\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

La proposition (i) est donc équivalente au fait que :

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} y_1(T)-\mu & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T)-\mu \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\mu^2 - \big(y_1(T)+y_2'(T)\big)\mu + \underbrace{y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T)}_{=w(T),\text{ cf. q. 1.}} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\mu^2 - \big(y_1(T)+y_2'(T)\big)\mu + 1 = 0 \qquad \text{d'après 1.} \end{aligned}$$

Les propositions (i) et (ii) sont donc équivalentes.

Montrons désormais que les propositions (i) et (iii) sont équivalentes. Pour y une solution de (H), on définit $u:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto e^{-\lambda t}y(t)\end{array}$. Alors :

$$\begin{aligned} (i) &\Leftrightarrow \exists\ y\in\mathcal{S}_H\ ;\ \forall t\in\mathbb{R},\ y(t+T) = \mu y(t) = e^{\lambda T} \\ &\Leftrightarrow \exists\ y\in\mathcal{S}_H\ ;\ \forall t\in\mathbb{R},\ u(t+T) = e^{-\lambda(t+T)}y(t+T) = e^{\lambda t}e^{-\lambda T}\mu y(t) \\ &\Leftrightarrow \exists\ y\in\mathcal{S}_H\ ;\ \forall t\in\mathbb{R},\ u(t+T) = e^{-\lambda t}y(t) = u(t) \quad \text{puisque } e^{-\lambda T}\mu = 1. \end{aligned}$$

Les propositions (i) et (iii) sont donc bien équivalentes.

Exercice (5).

Soit l'équation différentielle $\quad (E):\ x'(t) = x(t) - \big(x(t)\big)^2$.

1. a) Déterminer les solutions constantes de (E).
   b) On note $x_0 = x(0)$; étudier les solutions maximales de (E) selon que $x_0\in]0\,;1[$, $x_0\in]1\,;+\infty[$ ou $x_0\in]-\infty\,;0[$.
2. Déterminer les solutions maximales de (E).

▶ **Corrigé.–**

1. Il s'agit d'une équation différentielle autonome du type $x'(t) = f\big(x(t)\big)$ avec $f:\ x\mapsto x-x^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc, qui assure que pour tout couple $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$ il existe une

unique solution maximale x de (E) telle que $x(t_0) = x_0$, qui est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha\,;\beta[$ avec $\alpha \in [-\infty\,;+\infty[$ et $\beta \in]-\infty\,;+\infty]$.

a) On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$, donc les solutions constantes de (E) sont les fonctions $x_1 :\ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ et $x_2 :\ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$.

b) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si x est une solution non constante de (E), alors pour tout $t \in]\alpha\,;\beta[$, $x(t) \neq 0$ et $x(t) \neq 1$.
Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que la courbe de la solution x ne peut couper ni la droite d'équation $y = 0$, ni la droite d'équation $y = 1$.

Premier cas.
Si $x_0 \in]0\,;1[$, alors pour tout $t \in I =]\alpha\,;\beta[$: $0 < x(t) < 1$. Montrons alors que $\beta = +\infty$.
Pour tout $t \in I$, $x'(t) = \dfrac{1}{x(t)\big(1 - x(t)\big)} > 0$, donc la fonction x est strictement croissante sur I, et comme elle est majorée par 1, alors $\lim\limits_{t \to \beta^-} x(t)$ existe et est un nombre $\ell \in]0\,;1]$.
Si $\beta \neq +\infty$, alors la solution maximale y de (E) qui vérifie $y(\beta) = \ell$ est définie sur un intervalle ouvert J qui contient β.
Or x et y sont alors solutions de (E) sur $I \cap J$: par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on a donc $x = y$ sur $I \cap J$, et on peut alors prolonger la solution maximale x à $I \cap \big(J \cap [\beta\,;+\infty[\big)$.
Cela contredit le caractère maximal de la soltion x ; on en déduit que $\beta = +\infty$.
Montrons maintenant que $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$.
La fonction x est croissante sur I et à valeurs dans $]0\,;1[$, donc admet une limite $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \ell \in]0\,;1]$.
Si $\ell < 1$, alors $x'(t) = \dfrac{1}{x(t)\big(1 - x(t)\big)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \dfrac{1}{\ell(1 - \ell)} > 0$.
Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, $x'(t) \geqslant \dfrac{1}{2\ell(1 - \ell)} > 0$.
Mais alors, pour tout $t > A$:

$$x(t) - x(A) = \int_A^t x'(u)\mathrm{d}u \geqslant \int_A^t \frac{1}{2\ell(1-\ell)}\mathrm{d}u = \frac{t - A}{2\ell(1-\ell)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

Cela contredit bien sûr le fait que $x(t) < 1$ pour tout $t \in I$: on a donc prouvé par l'absurde que $\ell = 1 = \lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.
Un raisonnement analogue montrera que $\lim\limits_{x \to -\infty} x(t) = 0$.

Deuxième cas.
Si $x_0 \in]1\,;+\infty[$, alors pour tout $t \in I =]\alpha\,;\beta[,\ x(t) > 1$
et $x'(t) = \dfrac{1}{x(t)\big(1-x(t)\big)} < 0.$
La fonction x est alors strictement décroissante sur $I =]\alpha\,;\beta[$, et comme elle est minorée par 1, alors $\lim\limits_{t\to\beta^-} x(t)$ existe et appartient à $[1\,;+\infty[$.
On montre alors, comme dans le premier cas, que $\beta = +\infty$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1$.
Remarque : on peut aussi montrer que dans ce cas, $\alpha \in \mathbb{R}_-$ *et que* $\lim\limits_{t\to\alpha^+} x(t) = -\infty$.
Troisième cas. Si $x_0 \in]-\infty\,;0[$, alors on prouve de façon analogue que $\alpha = -\infty$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$, avec :

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\beta^-} x(t) = +\infty.$$

2. On suppose désormais que $x_0 \notin \{0\,;1\}$. Alors d'après ce qui a été fait à la question 1., on a $x(t) \notin \{0\,;1\}$ pour tout $t \in I =]\alpha\,;\beta[$, et on peut donc réécrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\forall t \in I,\ \frac{x'(t)}{x(t)\big(1-x(t)\big)} = 1,\ \text{ou encore}\ \frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{x'(t)}{x(t)-1} = 1\cdot$$

En reconnaissant des formules de dérivées classiques, on en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $\ln\left(\left|\dfrac{x(t)}{x(t)-1}\right|\right) = t + c$,

soit $\left|\dfrac{x(t)}{x(t)-1}\right| = Ke^t$ (où de fait, $K = e^c$).

On dans chacun des trois cas étudiés précédemment, le quotient $\dfrac{x(t)}{x(t)-1}$ garde un signe constant sur I.

On peut donc écrire : $\quad \forall t \in I,\ \dfrac{x(t)}{x(t)-1} = \lambda e^t$, où $\lambda = \dfrac{x_0}{x_0-1} \begin{cases} < 0 & \text{si } x_0 \in]0\,;1[\\ > 0 & \text{sinon} \end{cases},$

soit :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \lambda e^t x(t) - \lambda e^t \Leftrightarrow x(t) = \frac{\lambda e^t}{\lambda e^t - 1} = \frac{\frac{x_0}{x_0-1}e^t}{\frac{x_0}{x_0-1}e^t - 1}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{x_0 e^t}{x_0 e^t + 1 - x_0}\cdot$$

Il reste à remarquer que :

$$x_0 e^t + 1 - x_0 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{x_0 - 1}{x_0} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right),$$

d'où :

- Si $x_0 > 1$, alors $I =]\alpha\,;+\infty[= \left] \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right);+\infty\right[$,
- Et si $x_0 < 0$, alors $I =]-\infty\,;\beta[= \left]-\infty\,;\ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right)\right[$.

Exercice (6). Cauchy-Lipschtiz linéaire par approximation uniforme

Soient a, b deux réels avec $a < b$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
soient $A\colon \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ t \mapsto A(t)\end{array}$ et $B\colon \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\\ t \mapsto B(t)\end{array}$ deux fonctions continues ; soit $(t_0, X_0) \in [a\,;b] \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et soit le problème de Cauchy :

$$\text{(C.L.)} \quad \begin{cases} X'(t) & = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $||\cdot||$, et $E = \mathcal{C}\big([a\,;b],\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$ de la norme $||\cdot||_\infty\colon \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ Y \mapsto \max\limits_{t\in[a\,;b]} ||Y(t)|| \end{array}$.

On définit aussi la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par : $X_0\colon \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0\end{array}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_{p+1}\colon \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u\end{array}$.

1. Justifier que $\big(E, ||\cdot||_\infty\big)$ est un espace de Banach, et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p \in E$.
2. Montrer par récurrence, que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$;
$$\forall t \in [a\,;b], \quad ||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!}|t - t_0|^p ||X_1 - X_0||_\infty,$$
où $M = \max\limits_{t\in[a\,;b]} |||A(u)|||$, avec $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$ subordonnée à la norme $||\cdot||$.
3. En déduire que la série $\sum \big(X_{p+1} - X_p\big)$ converge normalement sur $[a\,;b]$, et en déduire que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un élément X de E qui est une solution de l'équation (C.L.).
4. **Application :** en utilisant les approximations successives (méthode ci-dessus), résoudre l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y'(t) & = 1 + y(t) \\ y(0) & = 2 \end{cases}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. On sait d'après le cours, que $\big(E, ||\cdot||_\infty\big)$ est un espace de Banach.
Montrons par récurrence que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $X_p \in E$.

Initialisation. La fonction constante $X_0 : \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0\end{array}$ est bien sûr continue et appartient à E.
Hypothèse de récurrence : $X_p \in E$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.
Hérédité. Les fonctions A, X_p et B sont continues, donc la fonction $t \mapsto A(t)X_p(t) + B(t)$, de $[a\,;b]$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue.
La fonction $X_{p+1} : \begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u\end{array}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, donc a foriori elle est continue, et $X_{p+1} \in E$.

2. On raisonne à nouveau par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour tout $t \in [a\,;b]$,

$$||X_1(t) - X_0(t)|| \leqslant ||X_1 - X_0||\infty = \frac{M^0}{0!}|t-t_0|^0 \cdot ||X_1 - X_0||\cdot$$

Hypothèse de récurrence :

$$\forall t \in [a\,;b],\ ||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!}|t-t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty,$$

pour un certain $p \in \mathbb{N}$.
Hérédité.
Pour tout $t \in [a\,;b]$, $X_{p+2}(t) - X_{p+1}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)\big(X_{p+1}(u) - X_p(u)\big)\mathrm{d}u$, d'où :

$$\begin{aligned}||X_{p+2}(t) - X_{p+1}(t)|| &= \Big|\int_{t_0}^{t} ||A(u)\big(X_{p+1}(u) - X_p(u)||_\infty \mathrm{d}u \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^{t} |||A(u)||| \cdot ||X_{p+1}(u) - X_p(u)||\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^{t} M \cdot \frac{M^p}{p!}|u-t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{M^{p+1}}{p!}||X_1 - X_0||_\infty \Big|\int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u\Big|\cdot\end{aligned}$$

Or, si $t \geqslant t_0$, alors :

$$\int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} (u-t_0)^p \mathrm{d}u = \Big[\frac{(u-t_0)^{p+1}}{p+1}\Big]_{t_0}^{t} = \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1},$$

et si $t < t_0$, alors :

$$\int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \big(-(u-t_0)\big)^p \mathrm{d}u = (-1)^p \int_{t_0}^{t} (u-t_0)^p \mathrm{d}u = (-1)^p \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1}\cdot$$

Ainsi : $\quad \left| \displaystyle\int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u \right| = \dfrac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}$, ce qui donne bien l'hérédité.

3. D'après 2., pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!}|t-t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty \leqslant \frac{M^p(b-a)^p}{p!} \cdot ||X_1 - X_0||_\infty,$$

d'où : $\quad ||X_{p+1} - X_p||_\infty \leqslant \dfrac{\big(M(b-a)\big)^p}{p!} \cdot ||X_1 - X_0||_\infty$.

Comme la série exponentielle $\sum \dfrac{\big(M(b-a)\big)^p}{p!}$ converge, alors la série $\sum (X_{p+1} - X_p)$ converge normalement, donc uniformément sur $[a\,b]$. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $X_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (X_{k+1} - X_k) + X_0$, alors la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$.
On note X cette limite ; puisque les fonctions X_p sont toutes continues, et puisque la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers X, alors X est continue, et $X \in E$.
Rappelons que par définition, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a\,;b]$:

$$X_{p+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u.$$

Or, pour tout $u \in [a\,;b]$:

$$\begin{aligned} ||\big(A(u)X_p(u) + B(u)\big) - \big(A(u)X(u) + B(u)\big)|| &= ||A(u)\big(X_p(u) - X(u)|| \\ &\leqslant |||A(u)||| \cdot ||X_p(u) - X(u)|| \\ &\leqslant M||X_p - X||. \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, indépendamment de u, donc la suite de fonctions $\big(u \mapsto A(u)X_p(u) + B(u)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers la fonction $\big(u \mapsto A(u)X(u) + B(u)\big)$, donc :

$$\forall t \in [a\,;b], \quad \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u\cdot$$

4. Pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$\begin{aligned} X(t) = \lim_{p\to+\infty} X_{p+1}(t) &= \lim_{p\to+\infty} \Big(X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u\Big) \\ &= X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

De plus, $X(t_0) = \lim_{p \to +\infty} X_p(t_0) = X_0 + 0 = X_0$.
Comme l'application $u \mapsto A(u)X(u) + B(u)$ est continue, alors la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et a pour dérivée $t \mapsto A(t)X(t) + B(t)$, donc :

$$\begin{cases} \forall t \in [a\,;b],\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ \text{et } X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

5. **Application.** D'après la méthode ci-dessus, la suite de fonctions $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall t \in [a\,;b],\ y_0(t) = 2 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a\,;b],\ y_{p+1}(t) = 2 + \int_{t_0}^{t} \big(1 + y_p(u)\big)\mathrm{d}u,$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ qui contient 0, vers la solution de l'équation : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \text{et } y'(t) = 1 + y(t) \end{cases}$.
Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_p(t) = 2 + 3t + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3}{p!}t^p.$$

Initialisation. Pour $p = 0$: $y_0(t) = 2$, donc la propriété est vraie au rang initial.
Hérédité. Pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$\begin{aligned} y_{p+1}(t) &= 2 + \int_{t_0}^{t} \big(1 + y_p(u)\big)\mathrm{d}u = 2 + \int_{t_0}^{t} \Big(1 + 2 + \frac{3}{2!}u + \cdots + \frac{3}{p!}u^p\Big)\mathrm{d}u \\ &= 2 + 3 + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3}{(p+1)!}t^{p+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $t \in [a\,;b]$:

$$y_p(t) = -1 + 3\Big(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^p}{p!}\Big) \xrightarrow[p \to +\infty]{} -1 + 3e^t$$

La solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y' = 1 + y \end{cases}$
est donc la fonction $y\colon\ t \mapsto -1 + 3e^t$.