Calcul intégral

Préparation à l'agrégation interne

Année 2023

1 Vrai/Faux

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Montrer
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. f est limite d'une suite de fonctions en escalier.
3. Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[a, b[$, alors $\lim\limits_{x\to b} \displaystyle\int_x^b f = 0$.
4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable. Alors f tend vers 0 en $+\infty$.
5. Soit f une fonction continue par morceux sur $\mathbb{R}_+$.
Si la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ admet une limite alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

2 Intégrale de Riemann

Exercice 1. Intégrales de Wallis
Les intégrales de Wallis sont données par
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^n d\theta, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta$$

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, et que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer la relation de récurrence $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}, \ I_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. Montrer que $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim I_{2n+2}$, et en déduire que
$$I_{2n}^2 \sim I_{2n}I_{2n+1} \sim \frac{\pi}{4n}.$$

Exercice 2. Sommes de Riemann

1. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ des sommes suivantes, en les interprétant comme des sommes de Riemann :
   (a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

(b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$.

(c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(\frac{k\pi}{n+1})$.

(d) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(\frac{k\pi}{n})$.

(e) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+3k}$.

(f) $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin(\frac{\pi}{k})$.

(g) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + o(\frac{1}{n})$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (a) Calculer la limite quand $n \to \infty$ de $U_{2n} - U_n$ en utilisant une somme de Riemann.
   (b) Rappeler pourquoi $\lim_{n\to\infty} V_n$ existe et calculer cette limite.

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. On pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$.
   (a) Déterminer D_f.
   (b) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.
   (c) Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Exercice 3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$|\int_a^b f(t)dt| = \int_a^b |f(t)|dt$$

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux.

1. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.
2. En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$$

Exercice 5. Lemme de Riemann Lebesgue
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt$$

1. Montrez que si f est une fonction en escalier, $I(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.
2. En déduire le résultat dans le cas général.
3. On suppose f décroissante et positive, montrer que $\lambda \to \lambda I(\lambda)$ est bornée.
4. Montrez que le résultat précédent est encore vrai si f est de classe C^1.

Exercice 6. Soit p et q strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $u,v>0$, $uv \leq \frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q$.(*On utilisera la concavité de la fonction logarithme*)
2. En déduire que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Exercice 7. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continue et soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, continue et décroissante. On note pour $x\in[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ et $H(x)=\int_a^x |f(t)|dt$.
Soit $N\in\mathbb{N}$ et pour $0\leq j\leq N$, $x_j=a+j\frac{b-a}{N}$.
Soit $I_N=\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)g(x_j)dt$ et $I=\int_a^b f(t)g(t)dt$.

1. Montrez que $|I_N-I|\leq \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j)-g(x_{j+1}))(H(x_{j+1})-H(x_j))$.
   En déduire que I_N tend vers I quand N tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $I_N=\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1})-F(x_j)) = g(b)F(b)+\sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j)-g(x_{j+1}))F(x_{j+1})$.
   En déduire que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq g(a)\sup_{c\in[a,b]}|\int_a^c f(t)dt|$$

3. On suppose maintenant f à valeurs réelles. Montrez qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt$$

Exercice 8. Soit $f:]0,1[\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{x-1}{\ln x}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. soit φ définie sur $]0,1[$ par $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$
   Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. (*pour la limite en 1, on pourra utiliser une primitive de* $\frac{1}{t\ln t}$)
   Montrer que φ est dérivable sur $]0,1[$. Est-elle dérivable en 0 et 1 ?
3. Calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

3 Intégrales impropres

Si $f:I\to\mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, on dira que f est intégrable sur I si l'intégrale généralisée $\int_I |f(x)|dx$ est convergente, c'est à dire si $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

Exercice 9. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_0^1 \ln(x)dx,\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x-1},\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x},\ \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt,\ \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}dt,\ \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}dt.$$

Exercice 10. Déterminer la nature des intégrales généralisées :
a) $\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^{-x}}dx$; c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{cox(\frac{1}{x})}}dx$; d) $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x^2-x}}dx$; e) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}dx$; f) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(\ln\ln x)^{\ln x}}$; g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+|\sin x|}$;

Calculer, en montrant la convergence : h) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$; j) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$;
k) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; convergence et calcul l) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$; m) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx$.

Exercice 11. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)dt}{1+t^2}$ converge. Grâce à un changement de variables simple montrer qu'elle est nulle. En déduire que pour tout $a>0$

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$

Exercice 12. Pour quelles valeurs de (α,β), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}$ est-elle convergente ?

Exercice 13. Soient a et b des réels ($a<b$). Montrer que la fonction définie sur $]a,b[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est intégrable sur $]a,b[$ et calculer son intégrale (on fera le changement de variable $t=\dfrac{x-a}{b-x}$).

Exercice 14. Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ et tout $b\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(ax+b)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=|a|\int_{-\infty}^{+\infty}f(at+b)dt$$

Exercice 15. Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt=0$
b) Montrer que, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt=f(0)$.

Exercice 16. Posons $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt$$

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=2\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}(x)dx$ et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

.

Exercice 17. Pour quelles valeurs de α, la fonction

$$x\mapsto\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 18. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
Pour ces valeurs de α, on note I_α l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Etablir une relation de récurrence entre les différentes valeurs I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
En déduire l'expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$
Exprimer l'intégrale :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2px+q)^n}$$

en fonction de I_n, lorsque p et q sont deux réels vérifiant l'inégalité $q - p^2 > 0$.
En déduire l'expression de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 20. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$.
Vérifier que l'application $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1.
En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} = \frac{\pi}{2}$.
En conclure que la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 21. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes, absolument convergentes $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$?

Exercice 22. Soit f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b[$ et supposons g POSITIVE. Montrer que si g est intégrable sur $[a, b[$ alors

$$f = o_b(g) \Longrightarrow \int_x^b f = o_b(\int_x^b g)$$

$$f \sim_b g \Longrightarrow \int_x^b f \sim_b \int_x^b g.$$

Exercice 23. Soit f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b[$ et supposons g POSITIVE. Montrer que, si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ alors

$$f = o_b(g) \Longrightarrow \int_a^x f = o_b(\int_a^x g)$$

$$f \sim_b g \Longrightarrow \int_a^x f \sim_b \int_a^x g.$$

4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 24. Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.
2. Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 25. Soit $a > 0$.

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+at} dt$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t}{(1+at)^2} dt$.

Exercice 26. Soit f une fonction continue telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction F $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1. Calculer sa fonction dérivée.

Exercice 27. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2} dt$.
a) Montrer que la fonction F est de classe C^∞.
b) Trouver les limites en 0 et en $+\infty$ de F.
c) Étudier le signe et les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$. (Indication : Pour $x > 0$ fixé Étudier la suite $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{x^2+t^2} dt$).

Exercice 28. Fonction gamma d'Euler
Livre de Gourdon

Sujet d'étude 1 (Intégrales eulériennes : fonction gamma, fonction bêta).

Le but de ce sujet d'étude est d'étudier et de donner quelques propriétés des fonctions *gamma* et *bêta* définies respectivement par

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad (x>0), \qquad \mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x,y>0).$$

1/ (Fonction gamma.) **a)** Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i. e.* que $\log\Gamma$ est convexe).
c) Montrer

$$\forall x>0,\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad \Gamma(n+1)=n!.$$

d) Donner un équivalent de Γ en 0^+ et tracer l'allure de son graphe.

2/ (Fonction bêta.) **a)** Montrer que B vérifie les équations fonctionnelles

$$\forall x,y>0,\qquad \mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,y).$$

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$. Montrer que pour tout $x>0$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n(x)=\Gamma(x)$. En exprimant $I_n(x)$ en fonction de la fonction B, en déduire

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

c) Montrer que pour $x,y>0$ fixés, $\mathrm{B}(x+n+1,y)\sim\Gamma(y)/n^y$ lorsque $n\to+\infty$. En déduire la formule

$$\forall x,y>0,\qquad \mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

d) Calculer $\Gamma(1/2)$.

3/ a) Démontrer la *formule de Weierstrass* :

$$\forall x>0,\qquad \frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right],$$

où γ est la constante d'Euler (le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}$ signifie $\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}$).
b) Montrer la *formule de duplication*

$$\forall x>0,\qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

c) En utilisant le développement en produit infini de la fonction sinus (voir la question b) de l'exercice 2 page 262) montrer la *formule des compléments*

$$\forall x\in\,]0,1[\,,\qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{\sin\pi x}{\pi}.$$

d) Montrer la relation

$$\forall x>0,\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire $\int_0^{+\infty}(\log t)e^{-t}\,dt=-\gamma$.